2-2 圓心角、圓周角與弦切角

1 圓心角及其所對的弧

對應能力指標 9-s-07

我們曾經學過弧的表示法與圓心角的概念，現在讓我們簡單的複習一下。

如圖 2-29，圓上的 A、B 兩點將圓周分成兩個弧，小於半圓的弧稱為**劣弧**，以 $\overset{\frown}{AB}$ 表示。大於半圓的弧稱為**優弧**，通常會在弧上加一點 C，以 $\overset{\frown}{ACB}$ 表示。其中 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓心角為 $\angle AOB$，$\overset{\frown}{ACB}$ 所對的圓心角為 $\angle 1$。

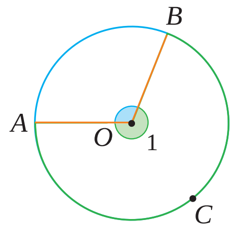
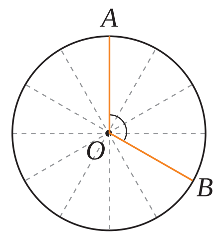


圖 2-29

隨堂練習

如右圖，將一圓分成十二等分，試求劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓心角 $\angle AOB$。



$\angle AOB=\frac{4}{12}\cdot 360^\circ=120^\circ$

我們已經知道，若圓心角為 x°，則弧的長度等於圓周長的 $\frac{x}{360}$。接下來，讓我們來看看弧的度數與圓心角的關係。

教學時數

- 10小時

活動 1 能理解弧的度數就是所對圓心角的度數。

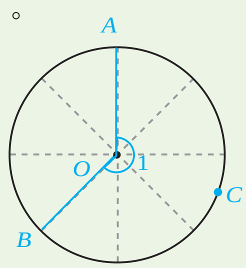
教學眉批

- 在第四冊已介紹過弧、優弧、劣弧及圓心角的概念，在此教師可透過弓弦、彩虹、拱門的圖形做連結，加深學生對弦、弧的印象。
- 若分割一圓的弦恰為直徑時，則可將圓分割成兩個半圓。也就是說：直徑會將一圓分割成兩個半圓。

補充問題

- 如右圖，將一圓分成八等分，試求優弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 所對的圓心角 $\angle 1$。

（$\angle 1=225^\circ$）



配套指示器

- 類題熟練本 P33
- MPB 圓形 P11～20

如圖 2-30，把兩個量角器拼成一個圓，可以觀察到，整個圓周被分成 360 等分的弧，其中每一等分的弧所對的圓心角剛好是 1°。我們稱 1 等分弧的度數為 1°，所以 x° 的圓心角所對弧的度數為 x°。

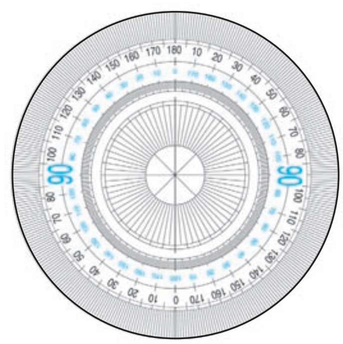


圖 2-30

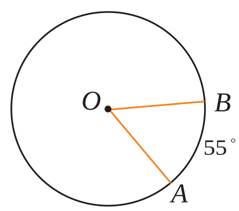
簡單的說：

弧的度數就是該弧所對圓心角的度數。

隨堂練習

如右圖，$\overset{\frown}{AB}$ 的度數是 55°，試求其所對的圓心角 $\angle AOB$。

圓心角 $\angle AOB=\overset{\frown}{AB}$ 的度數 $=55^\circ$



根據上面的說明：

如圖 2-31，若圓心角 $\angle AOB=x^\circ$，則：

(1) $\overset{\frown}{AB}$ 的度數為 x°，簡記為 $\overset{\frown}{AB}=x^\circ$。

(2) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度 = 圓周長 $\cdot \dfrac{x}{360}$。

(3) 扇形 OAB 的面積 = 圓面積 $\cdot \dfrac{x}{360}$。

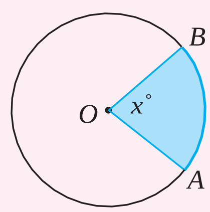
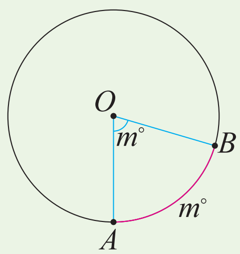


圖 2-31

通常在同圓(等圓)中，表示兩弧長的關係時，即可省去「長」。例如：$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，表示 $\overset{\frown}{AB}$ 的長與 $\overset{\frown}{CD}$ 的長相等，也表示兩弧的度數相等。所以 $\overset{\frown}{AB}$ 可以有三種意義：(1) $\overset{\frown}{AB}$ 本身；(2) $\overset{\frown}{AB}$ 的度數；(3) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度，其意義可由前後文的相關敘述分辨。

教學眉批

- 透過拼湊兩個量角器所形成的圓，讓學生察覺到「一弧的度數等於此弧所對圓心角的度數」的事實。
- 教師可透過下圖協助學生記憶：



- 教師可將扇形視為圓面積的一部分，再透過此例的關係來說明扇形面積。
- $\overset{\frown}{AB}$ 的記法有三個意義：
  (1) $\overset{\frown}{AB}$ 本身。
  (2) $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。
  (3) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度。
  通常在沒有特別說明下，$\overset{\frown}{AB}$ 表示 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數，建議教師在題幹中，宜說明清楚，在解題的過程中，則可與學生做約定，本教材以 $\overset{\frown}{AB}$ 代表 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數，「$\overset{\frown}{AB}$ 長」代表 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度。

教具指示器

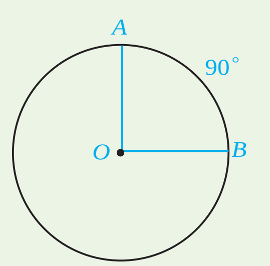
- 教學掛圖 (I)
  8A-14

配套指示器

- 類題熟練本 P33

補充問題

- 如右圖，$\overset{\frown}{AB}$ 的度數是 90°，試求其所對的圓心角 $\angle AOB$。
  ($\angle AOB=90^\circ$)



由此可知：

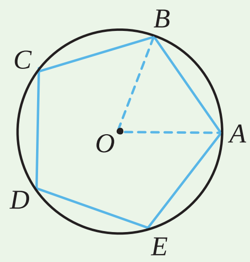
(1)在同圓(等圓)中，度數相等的兩弧等長。

(2)在同圓(等圓)中，度數愈大的弧，其弧的長度愈長。

例題 1 弧的度數與長度

搭配習作P28 基礎題1

如右圖，正五邊形 $ABCDE$ 的頂點均在圓 O 上，試求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。



解 $\because ABCDE$ 為正五邊形，

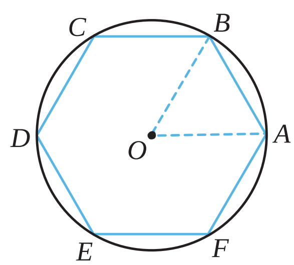
$\therefore$以 O 為頂點，可將正五邊形 $ABCDE$ 分割成 5 個全等的等腰三角形。

圓心角$\angle AOB=\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$

故 $\overset{\frown}{AB}=\angle AOB=72^\circ$。

隨堂練習

如右圖，正六邊形 $ABCDEF$ 的頂點均在圓 O 上，試求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。



圓心角$\angle AOB=\dfrac{360^\circ}{6}=60^\circ$

故 $\overset{\frown}{AB}=60^\circ$

教學眉批

- 第四冊已學習過扇形面積與弧長的求法，在此教學的目的是要讓學生連結圓心角的概念來進行解題。

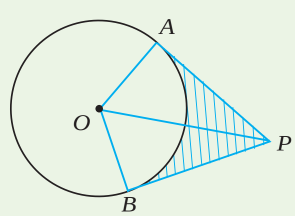
補充問題

- 如右圖，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 是 P 點到圓 O 的兩條切線，已知圓 O 的半徑長為 $2\sqrt{3}$，$\overline{OP}=4\sqrt{3}$，$\overset{\frown}{AB}=120^\circ$，

試求：(1)$\angle AOB$ 的度數。($\angle AOB=120^\circ$)

(2)切線長$\overline{PA}$。($\overline{PA}=6$)

(3)斜線部分的面積。(斜線部分的面積$=12\sqrt{3}-4\pi$)



配套指示器

- 類題熟練本 P33、34

如圖 2-32，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦，若$\angle AOB=\angle COD$，以 O 點為旋轉點，將$\triangle AOB$ 以順時針方向旋轉到 $\overline{OB}$ 與 $\overline{OD}$ 重疊，此時 A 點與 C 點重疊，因此 $\overline{AB}=\overline{CD}$。

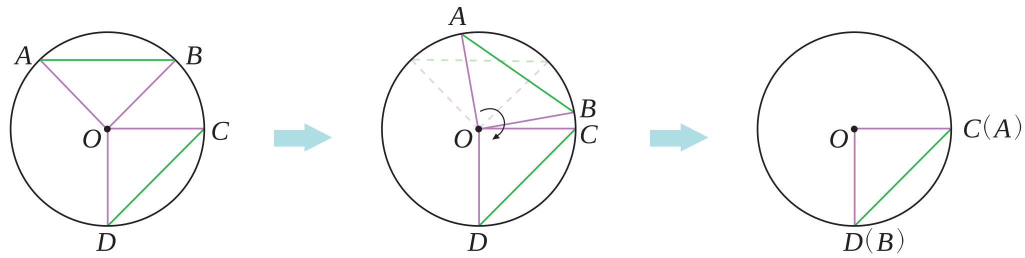


圖 2-32

如圖 2-33，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦，若$\angle AOB<\angle COD$，以 O 點為旋轉點，將$\triangle AOB$ 以順時針方向旋轉到 $\overline{OB}$ 與 $\overline{OD}$ 重疊，此時 A 點會落在 $\widehat{CD}$ 上，連接 $\overline{AC}$，因為$\angle CAD>\angle CAO=\angle OCA>\angle DCA$，所以在 $\triangle DAC$ 中，由大角對大邊可得 $\overline{AB}<\overline{CD}$。

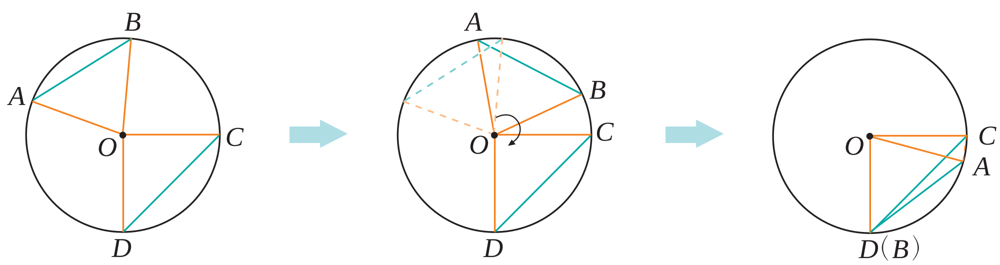


圖 2-33

由上面的說明可知：

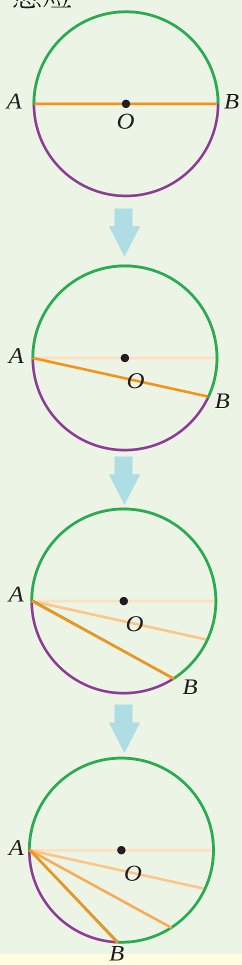
(1) 等圓(同圓)中，如果兩圓心角相等，則它們所對的弦等長；反之亦然。

(2) 等圓(同圓)中，如果兩個小於180度的圓心角不相等，則較大的圓心角，所對的弦也較長；反之亦然。

活動 2 能理解兩圓心角、弦與所對劣弧的關係。

教學眉批

- 教師可拿兩張透明的投影片重疊，來呈現此概念。
- 如下圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，若將 A 點固定，B 點以順時針方向沿著圓周向 A 點靠近，此時 $\widehat{AB}$ 愈來愈小，$\overline{AB}$ 的長度也愈來愈短。



補充問題

- 圓 O_1 與圓 O_2 為兩個等圓，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 分別為兩圓上的一弦，如果 $\overline{AB}=\overline{CD}$，回答下列問題：

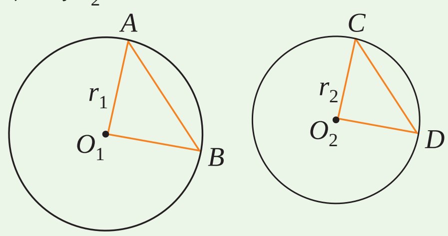
(1) $\angle AO_1B$ 與$\angle CO_2D$ 是否相等？（是）

(2) $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 的度數是否相等？（是）

(3) $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 的長度是否相等？（是）

例題 2 半徑與弦、弧的關係

如圖，圓 O_1 的半徑為 r_1，圓 O_2 的半徑為 r_2，
若兩個圓心角 $\angle AO_1B=\angle CO_2D$，
試求：(1)$\overset{\frown}{AB}$ 長：$\overset{\frown}{CD}$ 長的比值。
(2)$\overline{AB}:\overline{CD}$ 的比值。



解 (1)設 $\angle AO_1B=\angle CO_2D=x^\circ$，

$\overset{\frown}{AB}$ 長：$\overset{\frown}{CD}$ 長$=(2\pi r_1\cdot\dfrac{x}{360}):(2\pi r_2\cdot\dfrac{x}{360})=r_1:r_2$

故 $\overset{\frown}{AB}$ 長：$\overset{\frown}{CD}$ 長的比值為$\dfrac{r_1}{r_2}$。

(2)$\triangle AO_1B$ 和$\triangle CO_2D$ 中，

$\because \angle AO_1B=\angle CO_2D$，且 $\dfrac{\overline{O_1A}}{\overline{O_2C}}=\dfrac{\overline{O_1B}}{\overline{O_2D}}=\dfrac{r_1}{r_2}$，

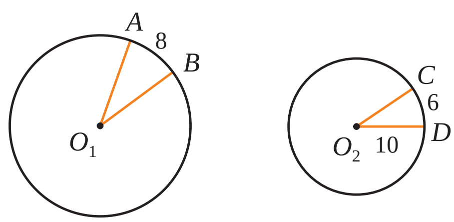
$\therefore \triangle AO_1B\sim\triangle CO_2D$（$SAS$ 相似），

故$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{r_1}{r_2}$，

即 $\overline{AB}:\overline{CD}$ 的比值為$\dfrac{r_1}{r_2}$。

隨堂練習

如圖，已知 $\overset{\frown}{AB}$ 長$=8$，$\overset{\frown}{CD}$ 長$=6$，
圓 O_2 的半徑為 10，
且$\angle AO_1B=\angle CO_2D$，
試求圓 O_1 的半徑。



$\because \angle AO_1B=\angle CO_2D$

$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 長：$\overset{\frown}{CD}$ 長$=r_1:r_2$

$8:6=r_1:10$

$r_1=\dfrac{40}{3}$

故圓 O_1 的半徑$=\dfrac{40}{3}$

教學眉批

- 例題 2 的教學目的，是要讓學生知道在兩個半徑不等的圓中，若圓心角相等，其所對應弧的度數會相等，但所對應的弧長、弦長並不相等。
- 教師可補充說明，在兩個等圓中，若兩弦等長，則兩弦所對應的圓心角、弧的度數、弧長會相等。

補充問題

- 圓 O_1 與圓 O_2 爲兩個半徑不等的圓，且 $r_1>r_2$，如果兩個圓心角 $\angle AO_1B=\angle CO_2D$，回答下列問題：
(1) $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 的度數是否相等？（是）
(2) $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 的長度是否相等？（$\overset{\frown}{AB}$ 長$>\overset{\frown}{CD}$ 長）
(3)兩弦長$\overline{AB}$ 和$\overline{CD}$ 是否相等？（$\overline{AB}>\overline{CD}$）

配套指示器

- 類題熟練本 P34

2 圓周角及其所對的弧

對應能力指標 9-s-07

當兩弦相交的交點在圓周上，其所形成的角稱為**圓周角**。如圖 2-34，$\angle BAC$為圓周角，$\overline{BC}$ 為此圓周角所對的弦，$\overset{\frown}{BC}$ 為此圓周角所對的弧。

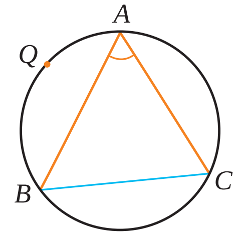


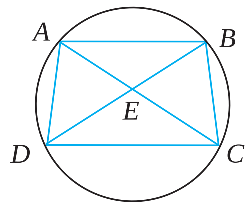
圖 2-34

反過來說，B、C 兩點將一圓分成 $\overset{\frown}{BC}$ 和 $\overset{\frown}{BQC}$，若在 $\overset{\frown}{BQC}$ 上任取一點 A，連接 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$，則$\angle BAC$ 為 $\overset{\frown}{BC}$ 所對的圓周角，因為 A 為 $\overset{\frown}{BQC}$ 上任一點，所以同一弧所對的圓周角有無限多個。

隨堂練習

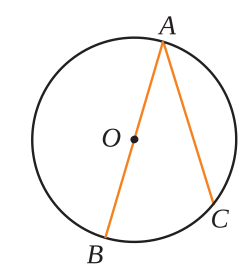
在右圖中，$\overset{\frown}{BC}$ 所對的圓周角有哪些？

$\angle BAC$ 與 $\angle BDC$

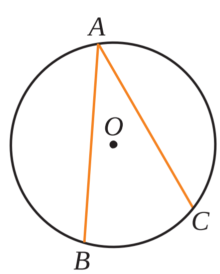


前面學過，圓心角的度數等於它所對弧的度數，那麼圓周角的度數和它所對弧的度數有沒有類似的關係呢？

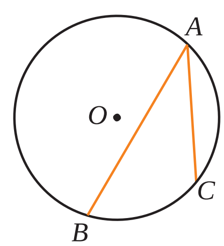
如圖 2-35，一圓的圓心和圓周角有三種位置關係：圓心在圓周角的一邊上、圓心在圓周角的內部、圓心在圓周角的外部。



圓心在圓周角的一邊上



圓心在圓周角內部



圓心在圓周角外部

圖 2-35

活動 3 能理解圓周角的定義。

活動 4 能理解一弧所對的圓周角的度數，是此弧所對圓心角度數的一半，也就是此弧度數的一半。

教學眉批

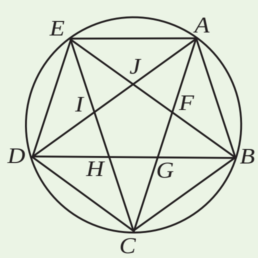
- 在此我們將圓周角分成下列三種情況討論：
  (1)圓心 O 在角的一邊上。
  (2)圓心 O 在角的內部。
  (3)圓心 O 在角的外部。
  目的是透過不同的形式，讓學生知道圓周角的度數都等於其所對弧度數的一半。

配套指示器

- 類題熟練本 P35

補充問題

- 在右圖中，$\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角有哪些？
（$\angle ACB$、$\angle ADB$、$\angle AEB$）



接下來，讓我們來看看，在這三種位置關係中，圓周角的度數和它所對弧的度數之間的關係。

1. 當圓心 O 在圓周角 $\angle A$ 的一邊上時：

如圖 2-36，連接 $\overline{OC}$。

$\because \overline{OA} = \overline{OC}$，$\therefore \angle C = \angle A$。

又 $\angle BOC = \angle C + \angle A$（外角定理），

$\therefore \angle BOC = 2\angle A$，

故 $\angle A = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

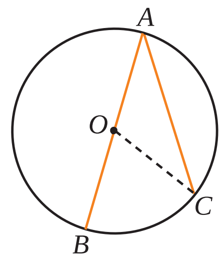


圖 2-36

2. 當圓心 O 在圓周角 $\angle BAC$ 的內部時：

如圖 2-37，作直徑 $\overline{AD}$，並連接 $\overline{OB}$、$\overline{OC}$。

根據 1. 的結果，可推得：

$\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$，$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD$，

$\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BOD + \frac{1}{2}\angle COD$

$= \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

故 $\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

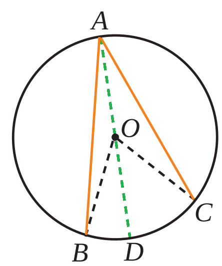


圖 2-37

3. 當圓心 O 在圓周角 $\angle BAC$ 的外部時：

如圖 2-38，作直徑 $\overline{AD}$，並連接 $\overline{OB}$、$\overline{OC}$。

根據 1. 的結果，可推得：

$\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$，$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD$，

$\angle BAC = \angle CAD - \angle BAD = \frac{1}{2}\angle COD - \frac{1}{2}\angle BOD$

$= \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

故 $\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

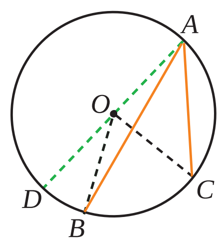
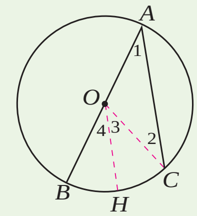


圖 2-38

教學眉批

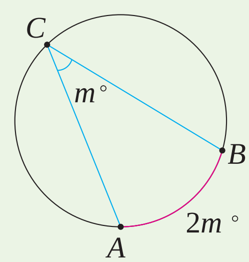
- 當圓心 O 在角的一邊上，還有另一種推導的方法。



如上圖，連接半徑 $\overline{OC}$，並過 O 點作 $\overline{OH} // \overline{AC}$。
$\because \overline{OA} = \overline{OC}$，
$\therefore \angle 1 = \angle 2$。
且 $\angle 3 = \angle 2$（內錯角），$\angle 1 = \angle 4$（同位角）
故 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$，
可推得 $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$。
又 $\angle BOC = \overset{\frown}{BC}$，
$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

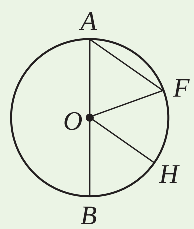
- 教師也可透過實際的數據來推導。

- 教師可透過下圖，協助學生記憶：



補充問題

- 如右圖，$\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑，$\overline{AF} // \overline{OH}$，$\angle A = 55°$，則下列敘述何者錯誤？
(A) $\angle AOF = 70°$ (B) $\overset{\frown}{BH} = 55°$
(C) H 爲 $\overset{\frown}{BF}$ 的中點 (D) F 爲 $\overset{\frown}{AH}$ 的中點
(D)



教具指示器

- 教學掛圖（I）
8B-14、9A-14、10A-14

教學眉批

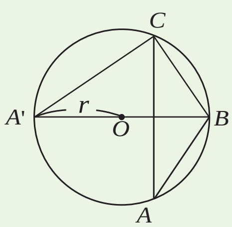
- 在較複雜的圖示中，對圖形分析能力較弱的學生是困難的，教師宜加以說明不同的圓周角與所對的弧之間的關係。

注意事項

- 圓周角的性質在高中數學的正弦定理會用到，如圖：

$\sin A'=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{A'B}}=\dfrac{\overline{BC}}{2r}=\sin A$，

故 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2r$



從上一頁的討論與說明可以得到：

(1)一弧所對的圓周角度數，等於該弧所對圓心角度數的一半。

(2)一弧所對的圓周角度數，等於此弧度數的一半。

(3)在同一圓中，一弧所對的所有圓周角的度數都相等。

如圖 2-39，$\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

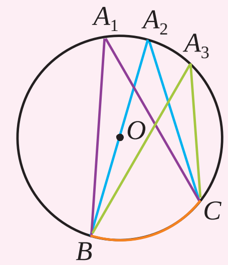
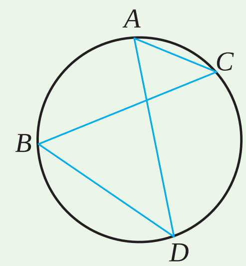


圖 2-39

例題 3　求圓周角　　搭配習作P28 基礎題2

如右圖，已知 $\overset{\frown}{AB}$ 長是圓周長的$\dfrac{1}{4}$，

試求∠ACB 與∠ADB。



解　∵ $\overset{\frown}{AB}$ 長是圓周長的$\dfrac{1}{4}$，

∴ $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{1}{4}\cdot 360^\circ=90^\circ$

又∠ACB 和∠ADB 均為 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角，

$$\begin{aligned}\therefore\ \angle ACB&=\angle ADB\\&=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\\&=45^\circ\end{aligned}$$

數學小語錄

思考，思考，再思考。　　——愛因斯坦（Albert Einstein，1879-1955）

配套指示器

- 類題熟練本 P35

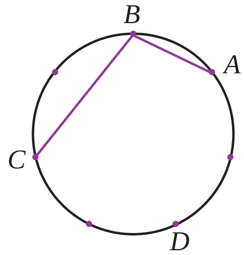
補充問題

- 在例題 3 中，如果 $\overset{\frown}{CD}$ 長是圓周長的$\dfrac{1}{3}$，試求∠CAD 與∠CBD。
（∠CAD＝∠CBD＝60°）

隨堂練習

如右圖，A、B、C 為圓上的七個等分點中的三個點，

試求$\angle ABC$。



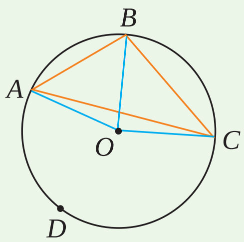
$$\angle ABC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{7}\cdot 360^\circ\right)$$
$$=\frac{720^\circ}{7}$$

例題 4　由圓周角求圓心角

如右圖，$\triangle ABC$ 的頂點均在圓 O 上，

已知$\angle BAC=45^\circ$，$\angle ABC=100^\circ$，

試求$\angle BOC$ 與$\angle AOC$。



解 (1) $\because \angle BAC$ 為 $\overset{\frown}{BC}$ 所對的圓周角，

$\therefore\ \overset{\frown}{BC}=2\angle BAC=2\cdot 45^\circ=90^\circ$，

又$\angle BOC$為 $\overset{\frown}{BC}$ 所對的圓心角，

$\therefore \angle BOC=\overset{\frown}{BC}=90^\circ$。

(2) $\because \angle ABC$ 為 $\overset{\frown}{ADC}$ 所對的圓周角，

$\therefore \angle ABC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}$，

$\overset{\frown}{ADC}=2\angle ABC=2\cdot 100^\circ=200^\circ$

又 $\overset{\frown}{ABC}=360^\circ-\overset{\frown}{ADC}=160^\circ$，

故$\angle AOC=\overset{\frown}{ABC}=160^\circ$。

補充問題

■ 承例題 4，試求$\angle AOB$。

（$\angle AOB=70^\circ$）

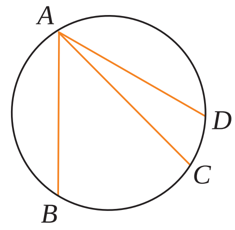
配套指示器

■ 類題熟練本 P35

隨堂練習

如右圖，A、B、C、D 為圓上四點，

已知$\angle BAD=60^\circ$，$\overset{\frown}{BC}=90^\circ$，試求 $\overset{\frown}{CD}$ 。



$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BCD}-\overset{\frown}{BC}$

$=2\angle BAD-90^\circ$

$=2\cdot 60^\circ-90^\circ$

$=30^\circ$

活動 5 能理解半圓所對的圓周角都是直角。

我們已經知道，一弧所對的圓周角度數，等於此弧度數的一半，如圖 2-40 中，當 $\overline{AB}$ 為直徑時，$\overset{\frown}{AB}=180^\circ$，故圓周角$\angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$。

又$\angle ACB$、$\angle AEB$ 與$\angle AFB$ 皆為 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角，

$\therefore \angle ACB=\angle AEB=\angle AFB=90^\circ$。

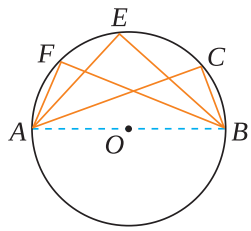


圖 2-40

也就是說：

搭配習作P29 基礎題3

半圓所對的圓周角是直角。

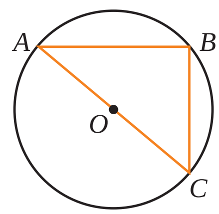
教學眉批

- 亦可讓學生驗證，在同一圓中，一弧所對的圓周角皆相等，同時要讓學生知道，半圓所對的圓周角必為直角。

隨堂練習

如右圖，$\overline{AC}$ 為圓 O 的直徑，B 為圓周上一點，

若$\angle BAC=40^\circ$，試求 $\overset{\frown}{AB}$。



$\because \overline{AC}$ 為直徑

$\therefore \overset{\frown}{ABC}=180^\circ$

又$\angle BAC=40^\circ$

$\therefore \overset{\frown}{BC}=80^\circ$

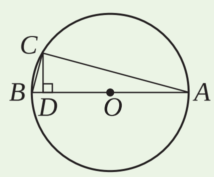
故 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{ABC}-\overset{\frown}{BC}=180^\circ-80^\circ=100^\circ$

配套指示器

- 類題熟練本 P35、36

補充問題

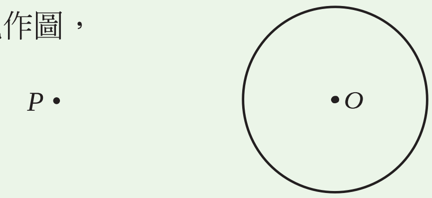
- 如右圖，$\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑，$\overline{AB}=16$，$\angle B=75^\circ$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，試求 $\overline{CD}$。（$\overline{CD}=4$）



在上一節時學過，要畫出通過圓 O 上任一點 P 的切線，只要先連接 $\overline{OP}$，再作通過 P 點且與 $\overline{OP}$ 垂直的直線即可。如果 P 點在圓 O 外，要如何畫出通過 P 點且與圓 O 相切的切線呢？我們可以利用「半圓所對的圓周角必為直角」性質，畫出過圓外一點的切線。

例題 5　過圓外一點作圓的切線

如右圖，P 為圓 O 外的一點，請利用尺規作圖，畫出通過 P 點且與圓 O 相切的直線。

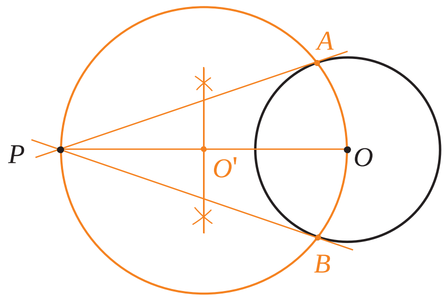


作法　(1)連接 $\overline{OP}$。

(2)以 $\overline{OP}$ 為直徑，作圓 O'，交圓 O 於 A、B 兩點。

(3)連接 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$。

(4)則 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 即為所求。



在例題 5 中，連接 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$，如圖 2-41。在圓 O' 中，因為 $\overline{OP}$ 為圓 O' 的直徑，由「半圓所對的圓周角必為直角」知，$\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$，因此 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 都是圓 O 的切線。

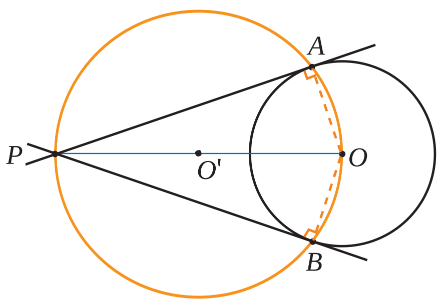


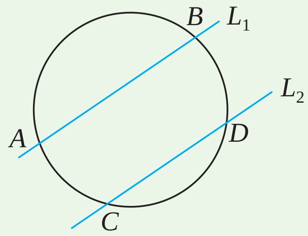
圖 2-41

配套指示器

■ 類題熟練本 P36

例題 6　平行線截等弧

如右圖，兩平行直線 L_1 和 L_2 在圓上截出 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BD}$，試說明 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$。

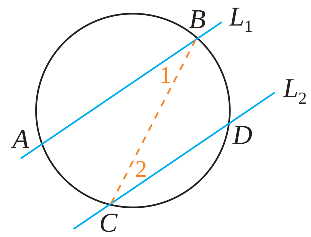


說明 (1)如右圖，連接 $\overline{BC}$。

(2)$\because L_1//L_2$，$\therefore \angle 1=\angle 2$（內錯角相等）。

(3)$\angle 1=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，$\angle 2=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$，

故 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$。



由例題 6 可知：

若兩直線平行，則此兩平行線在圓上所截出的兩弧度數相等。

隨堂練習

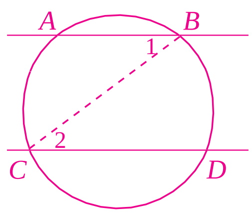
如右圖，若 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BD}$ 的度數相等，

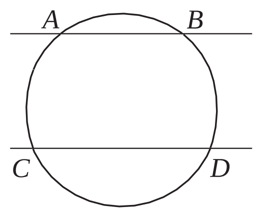
試說明 $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$。

連接 $\overline{BC}$

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，$\therefore \angle 1=\angle 2$

故 $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$





動動腦

如右圖，兩直線 $L_1//L_2$，且 L_2 與圓相切於 C 點，

請問 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 是否相等？

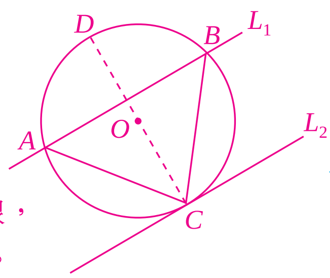
作直徑 $\overline{CD}$。

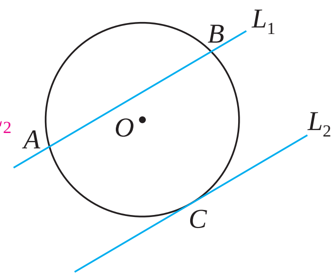
$\because C$ 為切點，$\therefore \overline{CD}\perp L_2$。

又 $L_1//L_2$，$\therefore \overline{CD}\perp L_1$。

故 $\overline{CD}$ 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，

則 $\overline{AC}=\overline{BC}$，即 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$。





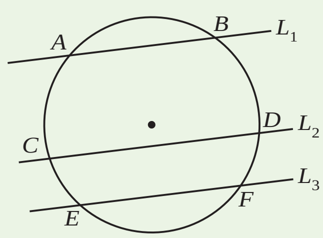
配套指示器

- 類題熟練本 P36、37
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 12 回

補充問題

- 如右圖，三條直線 $L_1//L_2//L_3$，若 $\overset{\frown}{BD}=60^\circ$，$\overset{\frown}{DF}=30^\circ$，試求 $\overset{\frown}{ACE}$。

（$\overset{\frown}{ACE}=90^\circ$）



3 圓內接四邊形

對應能力指標 9-s-07

活動 6 能理解圓內接四邊形的對角互補。

如圖 2-42，在圓上依序任取 A、B、C、D 四點，連接 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$，則四邊形 $ABCD$ 稱為圓 O 的**內接四邊形**，而圓 O 稱為四邊形 $ABCD$ 的**外接圓**。

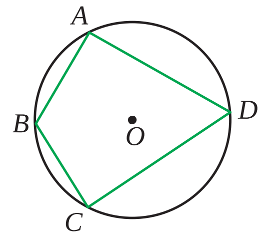


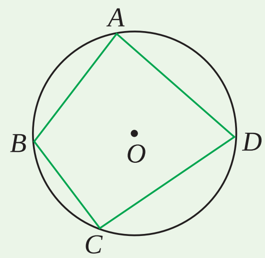
圖 2-42

接著，我們來學習圓內接四邊形的一些性質。

例題 7　圓內接四邊形對角互補

搭配習作P29 基礎題4 / P29 基礎題5

如右圖，$ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，試說明$\angle A+\angle C=180^\circ$，$\angle B+\angle D=180^\circ$。



說明 $\because \angle A$ 所對的弧為 $\overset{\frown}{BCD}$，$\angle C$ 所對的弧為 $\overset{\frown}{BAD}$，

$$\begin{aligned}\therefore \angle A+\angle C&=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}\\&=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD})\\&=\frac{1}{2}\cdot 360^\circ\\&=180^\circ\end{aligned}$$

同理，$\angle B+\angle D=180^\circ$。

由例題 7 可知：

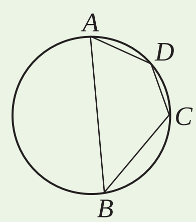
圓內接四邊形的對角互補。

補充問題

- 如右圖，$ABCD$ 爲圓內接四邊形，若 $\angle A=60^\circ$，$\overset{\frown}{AD}=50^\circ$，$\overset{\frown}{BC}=80^\circ$，則下列敘述何者錯誤？

(A) $\angle C=120^\circ$　(B) $\angle D=130^\circ$
(C) $\overset{\frown}{ADB}=170^\circ$　(D) $\angle B=45^\circ$

(B)

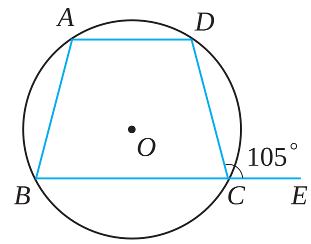


配套指示器

- 類題熟練本 P37

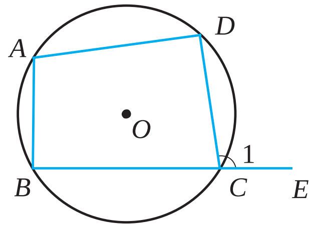
隨堂練習

1. 如右圖，$ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\angle DCE=105^\circ$，試求 $\angle A$ 與 $\angle B$。



$\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}$，且 $\angle DCE=105^\circ$，
$\therefore \angle D=105^\circ$，$\angle BCD=75^\circ$，
又 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形
$\therefore \angle A=180^\circ-\angle BCD=105^\circ$
$\angle B=180^\circ-\angle D=75^\circ$

2. 如右圖，$ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，$\angle 1$ 為 $\angle BCD$ 的外角，試說明 $\angle A=\angle 1$。



$\because ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形
$\therefore \angle A+\angle BCD=180^\circ$
又 $\angle 1$ 為 $\angle BCD$ 的外角
$\therefore \angle 1+\angle BCD=180^\circ$
故 $\angle A=\angle 1$。

由隨堂練習可知：

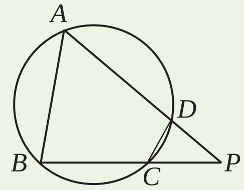
圓內接四邊形的任一外角，等於其相鄰內角的對角。

配套指示器

- 類題熟練本 P37

補充問題

- 如右圖，四邊形 $ABCD$ 爲圓內接四邊形，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 交於 P 點，若 $\angle P=40^\circ$，$\angle ADC=100^\circ$，試求 $\angle A$。（$\angle A=60^\circ$）



4 弦切角及其所夾的弧

對應能力指標 9-s-07

弦與切線在圓周上所形成的交角稱為**弦切角**。如圖 2-43，切線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與弦 $\overline{CD}$ 交於 C 點，$\angle BCD$ 與 $\angle ACD$ 即為弦切角，且 $\overset{\frown}{CD}$ 為弦切角 $\angle BCD$ 所夾的弧，而 $\overset{\frown}{CED}$ 為弦切角 $\angle ACD$ 所夾的弧。

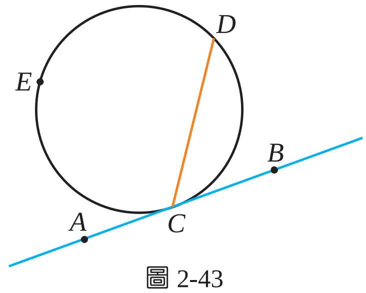


圖 2-43

接下來我們來學習，弦切角的度數與它所夾弧的度數之間的關係。

一圓上的弦切角可因弦是否通過圓心，而有下列兩種情況：

1. 弦 $\overline{CD}$ 通過圓心：

如圖 2-44，$\overline{CD}$ 為直徑，因此 $\overset{\frown}{CD}$ 為圓周的一半，也就是 $\overset{\frown}{CD}=180^\circ$，又 C 為切點，

$\therefore \angle ACD=\angle BCD=90^\circ$，

故 $\angle ACD=\angle BCD=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$。

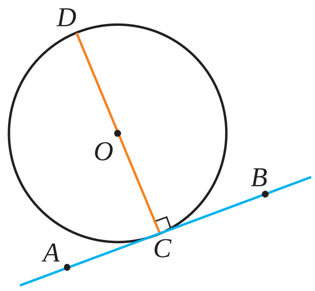


圖 2-44

2. 弦 $\overline{CD}$ 不通過圓心：

如圖 2-45，過 C 點作直徑 $\overline{CE}$，

承 1. 知 $\angle BCE=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CDE}$，$\angle ACE=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CFE}$，

$\angle BCD=\angle BCE-\angle DCE=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CDE}-\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$

$=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{CDE}-\overset{\frown}{DE})=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$

$\angle ACD=\angle ACE+\angle DCE=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CFE}+\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$

$=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{CFE}+\overset{\frown}{DE})=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CED}$

故 $\angle BCD=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$，$\angle ACD=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CED}$。

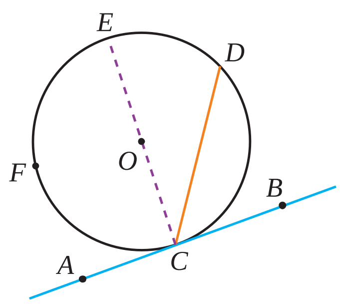


圖 2-45

從上面的說明可知：

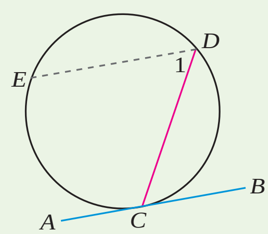
弦切角的度數等於所夾弧度數的一半。

活動 7 能理解弦切角的定義。

活動 8 能理解弦切角的度數是它所夾弧度數的一半。

教學眉批

- 亦可由「兩平行線截等弧」的性質說明：
如下圖，切線 $\overline{AB}$ 與弦 $\overline{CD}$ 交於 C 點，形成弦切角 $\angle DCB$，$\overset{\frown}{CD}$ 為 $\angle DCB$所夾的弧，
過 D 點作 $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$ 交圓於 E，根據「兩平行線截兩等弧」的性質，可得 $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{CD}$
$\because \overline{DE}$ // $\overline{AB}$，
$\therefore \angle DCB=\angle 1$（內錯角相等）
又 $\angle 1=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CE}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$
$\therefore \angle DCB=\angle 1$
$=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$

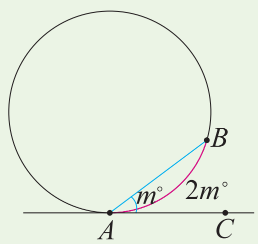


教具指示器

- 教學掛圖 (I) 9B-14

教學眉批

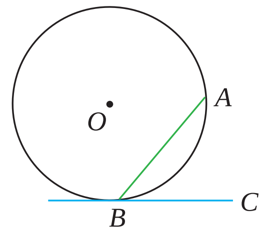
- 弦切角是圓周角的一種特例，也就是將圓周角的一邊平行移動，使其變爲圓的一條切線。另一邊亦平行移動，使其一端在切點上。
- 本教材是依「弦切角→圓內角→圓外角」的順序進行介紹。
- 教師可透過下圖，協助學生記憶：



- 例題 8 的目的是要推導出：若圓周角所對的弧與弦切角所夾的弧相同時，則此圓周角與弦切角的度數相等。

隨堂練習

如右圖，$\angle ABC$ 為圓 O 的一個弦切角，若 $\angle ABC=50^\circ$，試求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。



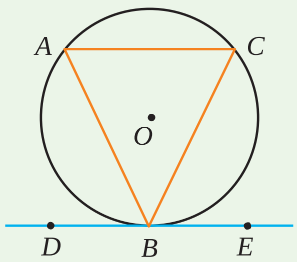
$\because \angle ABC$ 為弦切角

$\therefore \overset{\frown}{AB}=2\angle ABC=100^\circ$

例題 8　求弦切角

搭配習作P30 基礎題6

如右圖，$\overleftrightarrow{DE}$ 與圓 O 相切於 B 點，已知 $\angle CAB=60^\circ$，試求 $\angle CBE$。



解　$\because \angle CAB$ 為圓周角，

$\therefore \angle CAB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

又 $\angle CBE$ 為弦切角，

$\therefore \angle CBE=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$，

故 $\angle CBE=\angle CAB=60^\circ$。

由例題 8 知：

如圖 2-46，$\angle BAC$ 為圓周角，$\angle BCD$ 為弦切角，則 $\angle BAC=\angle BCD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

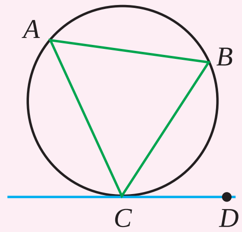


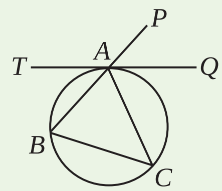
圖 2-46

配套指示器

- 類題熟練本 P38

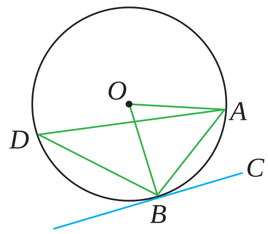
補充問題

- 如右圖，$\overleftrightarrow{TQ}$ 爲圓的切線，A 爲切點，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，且 $\angle PAQ=48^\circ$，試求 $\angle QAC$。
（$\angle QAC=66^\circ$）



隨堂練習

如右圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的弦，$\overline{BC}$ 與圓 O 切於 B 點，若$\angle AOB=70^\circ$，試求$\angle ABC$ 、$\angle ADB$。



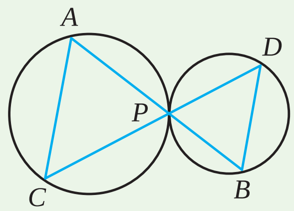
$\overset{\frown}{AB}=\angle AOB=70^\circ$

$\angle ADB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=35^\circ$

$\angle ABC=\angle ADB=35^\circ$

例題 9　弦切角的應用

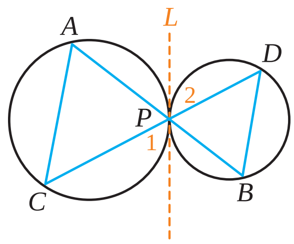
如右圖，兩圓外切於 P 點，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點，試說明 $\overline{AC}\,/\!/\,\overline{BD}$。



說明 (1)如右圖，過 P 點作兩圓的公切線 L。

$\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CP}=\angle 1$

$\angle B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{PD}=\angle 2$



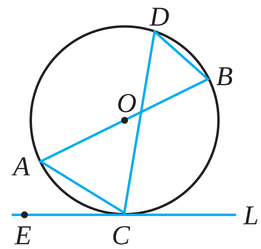
(2)又$\angle 1=\angle 2$(對頂角)，

$\therefore \angle A=\angle B$，

故 $\overline{AC}\,/\!/\,\overline{BD}$(內錯角相等)。

隨堂練習

如右圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，L 為通過 C 點的切線，若$\angle ACE=32^\circ$，試求$\angle D$。



$\overset{\frown}{AC}=2\angle ACE=64^\circ$

$\because \overline{AB}$ 為直徑

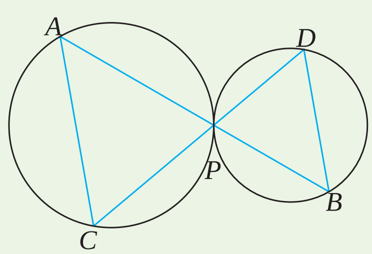
$\therefore \overset{\frown}{ACB}=180^\circ$

$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AC}=180^\circ-64^\circ=116^\circ$

$\angle CDB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=58^\circ$

補充問題

- 如右圖，兩圓外切於 P 點，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點，若$\angle A=50^\circ$，試求$\angle B$。
  ($\angle B=50^\circ$)



配套指示器

- 類題熟練本 P38、39
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 13 回

5 圓內角與圓外角

對應能力指標 9-s-07

若兩弦交於圓內一點，則這兩弦所形成的交角稱為**圓內角**。如圖 2-47，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 分別為圓 O 的兩弦，且 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點，則$\angle APC$、$\angle BPC$、$\angle BPD$、$\angle APD$ 皆為圓內角。

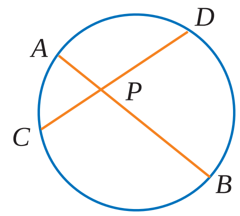
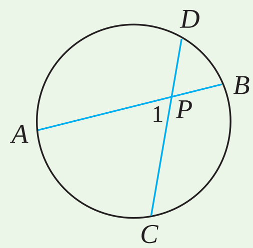


圖 2-47

例題 10 求圓內角的度數

搭配習作P30 基礎題7

如右圖，$\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 兩弦交於圓內一點 P，已知 $\overset{\frown}{AC}=80^\circ$，$\overset{\frown}{BD}=30^\circ$，試求$\angle 1$。



解一 如右圖，過 D 點作 $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$ 交圓於 E 點，

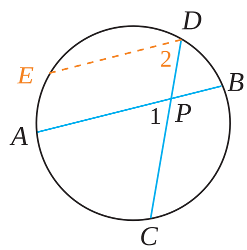
$\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BD}=30^\circ$（兩平行線截兩等弧）

$\because \overline{DE}\,//\,\overline{AB}$，$\therefore \angle 1=\angle 2$（同位角）

$\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{EAC}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{AC})$

$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AC})=\frac{1}{2}(30^\circ+80^\circ)=55^\circ$

$\therefore \angle 1=55^\circ$



解二 如右圖，連接 $\overline{AD}$。

$\because \angle 1$ 為$\triangle APD$ 的外角，

$\therefore \angle 1=\angle 3+\angle 4$

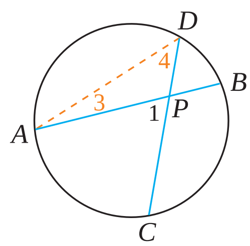
$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AC})$

$=\frac{1}{2}(30^\circ+80^\circ)$

$=55^\circ$

$\angle 3$ 和$\angle 4$ 所對的弧分別為 $\overset{\frown}{BD}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$



活動 9 能理解圓內角與所夾兩弧的度數關係。

教學眉批

- 兩弦在圓內部所形成的交角共有兩組（4個），教師宜說明其皆為圓內角。
- 透過平移的轉換來產生輔助線，有助於學生能直觀的進行圖形的長度、角度量的轉換。
- 在《解一》中，想像將弦 $\overline{AB}$ 平行移到直線 $\overline{DE}$，使得圓內角$\angle 1$ 轉換成圓周角$\angle 2$，再利用「兩平行線截兩等弧」來推導。
- 也可以選擇做輔助線 $\overline{BF}\,//\,\overline{CD}$，透過將圓內角$\angle 1$ 轉換成圓周角$\angle ABF$ 來進行解題。
- 教師可引導學生畫出不同的輔助線來進行推導，例如：作 $\overline{BC}$ 連線，再利用三角形的外角性質來進行解題。

教具指示器

- 教學掛圖 (I) 11A-14

配套指示器

- 類題熟練本 P39

由例題 10 知：

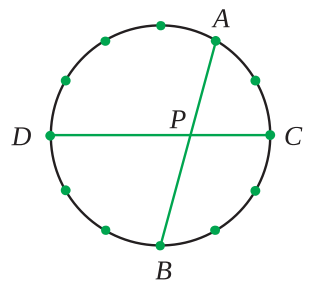
圓內角的度數等於此角及其對頂角所對兩弧度數和的一半。

隨堂練習

如右圖，A、B、C、D 為圓上十二個等分點中的四個點，

其中 P 為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的交點，

試求 $\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{BD}$ 和 $\angle APC$。



$\overset{\frown}{AC}=\frac{2}{12}\cdot 360^\circ=60^\circ$

$\overset{\frown}{BD}=\frac{3}{12}\cdot 360^\circ=90^\circ$

$\angle APC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AC})=\frac{1}{2}(90^\circ+60^\circ)=75^\circ$

如圖 2-48，若 $\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$ 為圓的割線或切線，且交於圓外一點 P，則 $\angle P$ 稱為**圓外角**。

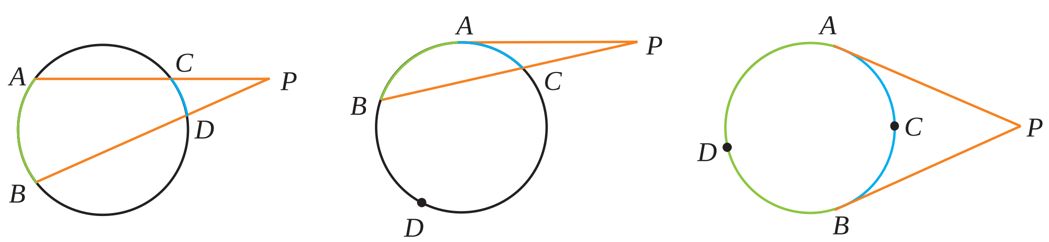


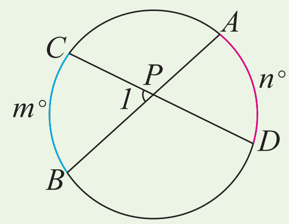
圖 2-48

數學小語錄

沒有不能解決的問題。 —— 韋達（Francisciscus Vieta，1540-1603）

教學眉批

- 教師可透過下圖協助學生記憶：



$\angle BPC=\frac{1}{2}(m^\circ+n^\circ)$

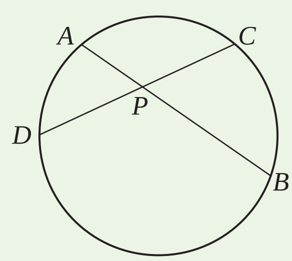
活動 10 能理解圓外角與所夾兩弧的度數關係。

- 圓外角的定義為「若 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 為圓的兩割線或切線，則我們稱 $\angle APB$ 為圓外角。」教師宜提醒學生圓外角 $\angle APB$ 是兩割線或切線在圓外所形成的交角。

補充問題

- 如右圖，弦 $\overline{AB}$ 交弦 $\overline{CD}$ 於 P 點，若 $\overset{\frown}{AD}=50^\circ$，$\overset{\frown}{BC}=70^\circ$，試求 $\angle BPD$。

（$\angle BPD=120^\circ$）



教具指示器

- 教學掛圖 (I)

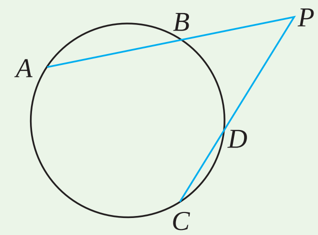
10B-14、11B-14、12A-14

配套指示器

- 類題熟練本 P39

例題11 求圓外角的度數

如右圖，兩割線 $\overline{PA}$、$\overline{PC}$ 交於圓外一點 P，已知 $\overset{\frown}{AC}=144^\circ$，$\overset{\frown}{BD}=60^\circ$，試求 $\angle P$。



解一 如右圖，過 D 點作 $\overline{DE} \,/\!/\, \overline{AB}$，

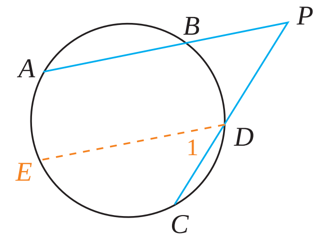
$\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BD}=60^\circ$（兩平行線截兩等弧），

$\because \overline{DE} \,/\!/\, \overline{AB}$，$\therefore \angle P=\angle 1$（同位角）

又 $\angle 1=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{EC}=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AE})$

$=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})=\dfrac{1}{2}(144^\circ-60^\circ)=42^\circ$

$\therefore \angle P=42^\circ$



解二 如右圖，連接 $\overline{AD}$。

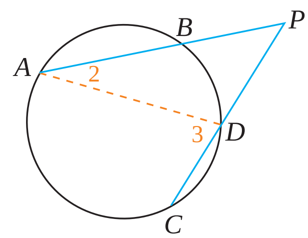
$\because \angle 3$ 為 $\triangle ADP$ 的外角，

$\therefore \angle P=\angle 3-\angle 2$

$=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}-\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$

$\angle 2$ 和 $\angle 3$ 所對的弧分別為 $\overset{\frown}{BD}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$

$=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})=\dfrac{1}{2}(144^\circ-60^\circ)=42^\circ$



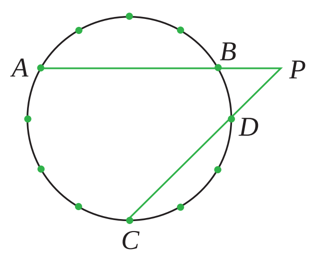
隨堂練習

如右圖，A、B、C、D 為圓上十二個等分點中的四個點，P 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 的交點，試求 $\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{BD}$ 與 $\angle P$。

$\overset{\frown}{AC}=\dfrac{4}{12}\cdot 360^\circ=120^\circ$

$\overset{\frown}{BD}=\dfrac{1}{12}\cdot 360^\circ=30^\circ$

$\angle P=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})=\dfrac{1}{2}(120^\circ-30^\circ)=45^\circ$



教學眉批

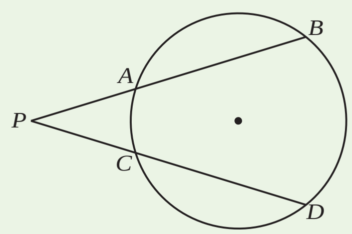
- 例題 11 是兩割線所形成的圓外角。
- 在例題 11 的《解一》中，也可以選擇做輔助線 $\overline{BF} \,/\!/\, \overline{CD}$。
- 想像將 $\overline{AP}$ 平移到 $\overline{DE}$，使得圓外角 $\angle P$ 轉換成圓周角 $\angle 1$，再利用「兩平行線截等弧」的性質推導。
- 在例題 11 的《解二》中，也可以選擇做 $\overline{BC}$ 連線。

配套指示器

- 類題熟練本 P40

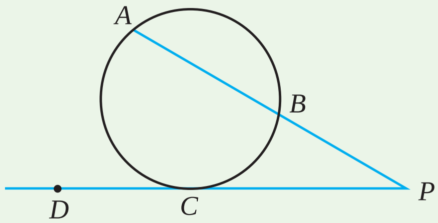
補充問題

- 如右圖，兩割線 $\overline{PB}$、$\overline{PD}$ 交於圓外一點 P，已知 $\overset{\frown}{AC}=45^\circ$，$\overset{\frown}{BD}=113^\circ$，試求 $\angle P$。
（$\angle P=34^\circ$）



例題 12 求圓外角的度數

如右圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PD}$ 交於圓外一點 P，其中 $\overleftrightarrow{PA}$ 為圓的割線，$\overleftrightarrow{PD}$ 為圓的切線，且與圓切於 C 點。若 $\overset{\frown}{AC}=140^\circ$，$\overset{\frown}{BC}=80^\circ$，試求 $\angle P$。



解 如右圖，連接 $\overline{AC}$。

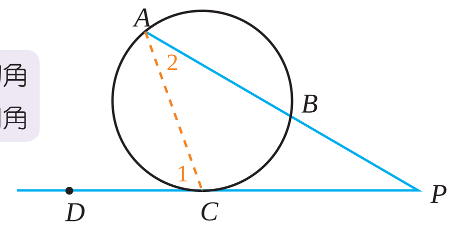
$\because \angle 1$ 為 $\triangle ACP$ 的外角，

$\therefore \angle P=\angle 1-\angle 2$

$=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}-\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ ← ∠1為弦切角 ∠2為圓周角

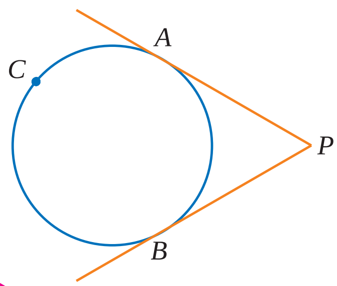
$=70^\circ-40^\circ$

$=30^\circ$



隨堂練習

如右圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 和 $\overleftrightarrow{PB}$ 分別與圓切於 A、B 兩點，並交於圓外一點 P，若 $\overset{\frown}{ACB}=240^\circ$，試求 $\angle P$。

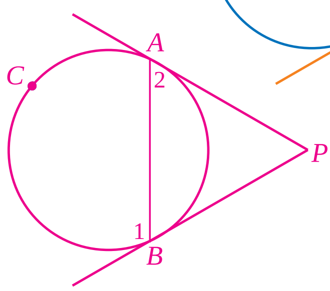


連接 $\overline{AB}$，

$\because \angle 1$為$\triangle ABP$ 的外角，

$\therefore \angle P=\angle 1-\angle 2=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB})$

$=\dfrac{1}{2}(240^\circ-120^\circ)=60^\circ$

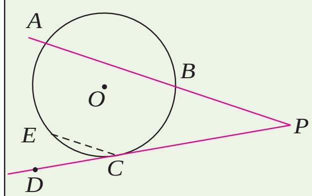


由例題 11、例題 12 與隨堂練習可知：

圓外角的度數等於所對的兩弧度數差的一半。

教學眉批

- 例題 12 是一割線與一切線所形成的圓外角。
- 例題 12 的解，也可以選擇做輔助線 $\overline{BF}\parallel\overline{CD}$。
- 例題 12 也可用「兩平行線截等弧」的性質推導：
  如下圖，過 C 點作 $\overline{CE}\parallel\overline{AB}$，根據「兩平行線截兩等弧」的性質，可得 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BC}=80^\circ$



$\because \overline{CE}\parallel\overline{AB}$，

$\therefore \angle P=\angle ECD$

$\angle ECD=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{EC}$

$=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AE})$

$=\dfrac{1}{2}(140^\circ-80^\circ)$

$=30^\circ$

故 $\angle P=30^\circ$

- 隨堂練習是兩切線形成的圓外角。

配套指示器

- 類題熟練本 P40
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 14 回

重點回顧

1. 弧的度數與長度：

(1)弧的度數等於該弧所對圓心角的度數。

(2)等圓(同圓)中，度數相等的兩弧等長。

(3)等圓(同圓)中，度數愈大的弧，其弧的長度愈長。

2. 圓心角與弦關係：

(1)等圓(同圓)中，如果兩圓心角相等，則其所對的弦等長；反之亦然。

(2)等圓(同圓)中，如果兩個小於 180 度的圓心角不相等，則較大的圓心角所對的弦較長；反之亦然。

3. 圓周角：

(1)一弧所對的圓周角度數，等於該弧所對圓心角度數的一半。

(2)一弧所對的圓周角度數，等於此弧度數的一半。

(3)在同一圓中，同一弧所對的所有圓周角的度數都相等。

(4)半圓所對的圓周角必為直角。

4. 圓內接四邊形：

(1)如圖 2-49，在圓上依序任取 A、B、C、D 四點，連接 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$，則四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，圓 O 為四邊形 $ABCD$ 的外接圓。

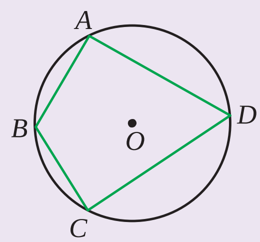


圖 2-49

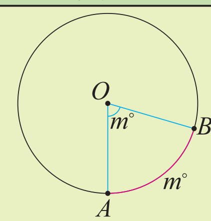
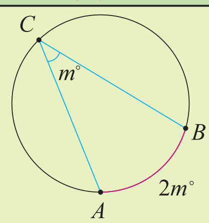
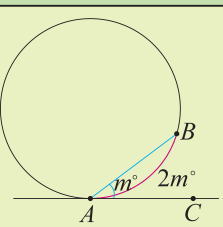
(2)圓內接四邊形的對角互補。

(3)圓內接四邊形的任一外角，等於其相鄰內角的對角。

5. 平行線截等弧性質：

若兩直線平行，則此兩平行線在圓上所截出的兩弧度數相等。

▪教師可透過圖示，將各角度與弧的關係整理如下：

名稱	圓心角	圓周角	弦切角
圖示			
性質	$\angle AOB=m^\circ$ $\overset{\frown}{AB}=m^\circ$	$\angle ACB=m^\circ$ $\overset{\frown}{AB}=2m^\circ$	$\angle BAC=m^\circ$ $\overset{\frown}{AB}=2m^\circ$

6. 弦切角：

⑴弦切角的度數等於所夾弧度數的一半。

⑵如圖 2-50，$\angle A$ 為圓周角，$\angle BCD$ 為弦切角，則$\angle A=\angle BCD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

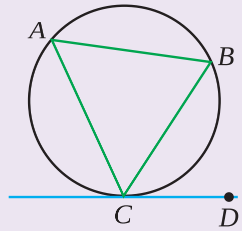


圖 2-50

7. 圓內角：

圓內角的度數等於此角及其對頂角所對兩弧度數和的一半。

如圖 2-51，$\angle APC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$。

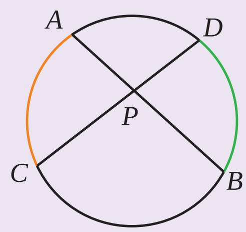
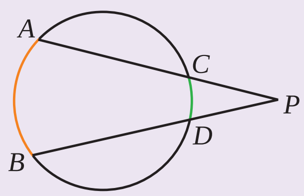


圖 2-51

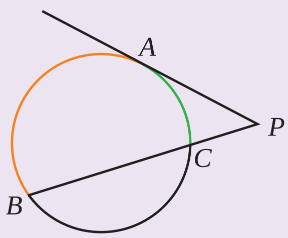
8. 圓外角：

圓外角的度數等於所對的兩弧度數差的一半。



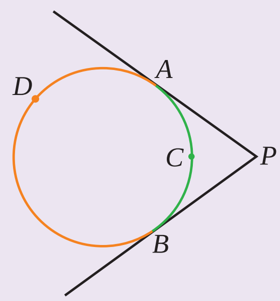
$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD})$

圖 2-52



$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AC})$

圖 2-53



$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ADB}-\overset{\frown}{ACB})$

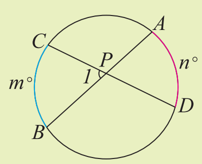
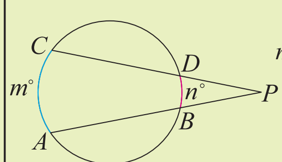
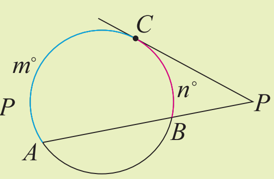
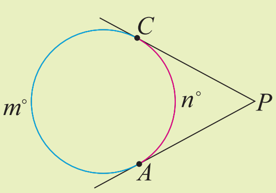
圖 2-54

數學小語錄

給我最大快樂的，不是已懂的知識，而是不斷的學習；
不是已有的東西，而是不斷的獲取；
不是已達到的高度，而是繼續不斷的攀登。

—— 高斯（Carl Friedrich Gauss，1777-1855）

▪教師可透過圖示，將各角度與弧的關係整理如下：

名稱	圓內角	圓外角		
圖示				
性質	$\angle 1=\frac{1}{2}(m^\circ+n^\circ)$	$\angle P=\frac{1}{2}(m^\circ-n^\circ)$		

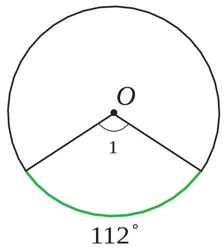
配套指示器

▪無敵大補帖基礎篇
P17～20

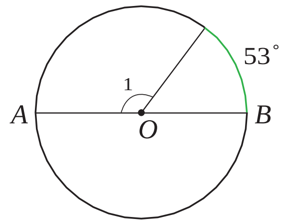
2-2 自我評量

1. 試求下列各小題中圓心角$\angle 1$。

(1)



(2)

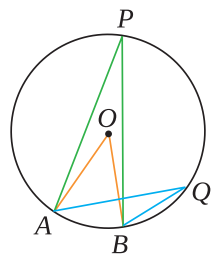


$\overline{AB}$ 為直徑

$\angle 1 = 112^\circ$

$\angle 1 = 180^\circ - 53^\circ = 127^\circ$

2. 如右圖，若 $\overset{\frown}{AB}$ 長為圓 O 周長的 $\frac{1}{8}$，試求$\angle AOB$、$\angle APB$ 和$\angle AQB$。



$\overset{\frown}{AB}$ 的度數$= \frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$

$\therefore \angle AOB = 45^\circ$

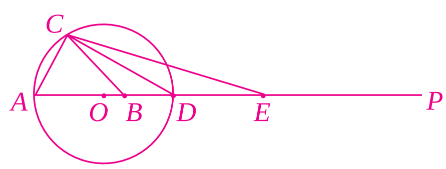
$\angle APB = \angle AQB = 22.5^\circ$

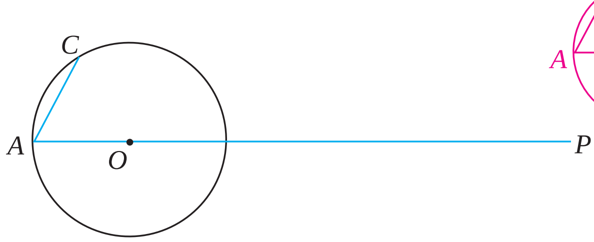
3. 如圖，已知圓 O 上 A、C 兩點，試完成下列問題：

(1)在 $\overline{AP}$ 上找出一點 B，使得$\angle ACB$ 為銳角。

(2)在 $\overline{AP}$ 上找出一點 D，使得$\angle ACD$ 為直角。

(3)在 $\overline{AP}$ 上找出一點 E，使得$\angle ACE$ 為鈍角。





配套指示器

- 類題熟練本 P41、42
- 考前衝刺 P10、11
- 考前 100 分 P10、11
- 歷屆基測試題 2-2

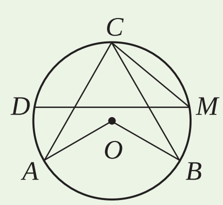
補充問題

- 如右圖，$\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓心角為 $\angle AOB$，$\overset{\frown}{CD}$ 所對的圓周角為 $\angle M$，若 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$，則下列敘述何者正確？

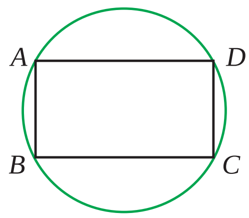
(A) $\angle AOB = \angle M$　(B) $\angle AOB > 2\angle M$

(C) $\angle AOB < 2\angle M$　(D) $\angle AOB = 2\angle M$

(B)

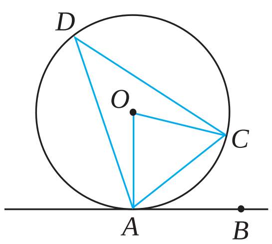


4. 如右圖，圓內接四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，試求 $\angle A$。



$\because ABCD$ 為平行四邊形
$\therefore \angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$
又 $ABCD$ 為圓內接四邊形
$\therefore \angle A+\angle C=180^\circ$，$\angle B+\angle D=180^\circ$
故 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$

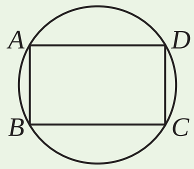
5. 如右圖，$\overline{AC}$ 為圓 O 的一弦，$\overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 A 點，已知 $\angle CAB=38^\circ$，試求 $\angle COA$、$\angle CDA$。



$\because \overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 A 點，$\angle CAB=38^\circ$
$\therefore \angle CDA=\angle CAB=38^\circ$
$\angle COA=2\angle CAB=2\cdot 38^\circ=76^\circ$

補充問題

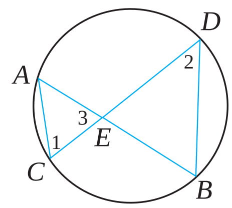
- 如右圖，矩形 $ABCD$ 內接於一直徑爲 5 的圓，若 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$，試求 $\overline{AB}$。
（$\overline{AB}=\sqrt{5}$）



配套指示器

- 類題熟練本 P41、42

6. 如右圖，圓內兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 E 點，若$\angle BAC=50^\circ$，$\angle ABD=60^\circ$，試求$\angle 1$、$\angle 2$及$\angle 3$。



$\angle 2=\angle CAB=50^\circ$

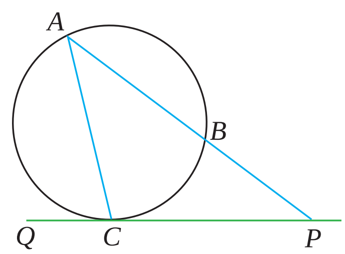
$\angle 1=\angle ABD=60^\circ$

又 $\overset{\frown}{AD}=2\angle ABD=120^\circ$，$\overset{\frown}{BC}=2\angle CAB=100^\circ$

$\therefore \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=360^\circ-\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}=140^\circ$

故$\angle 3=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})=\frac{1}{2}\cdot 140^\circ=70^\circ$

7. 如右圖，$\overleftrightarrow{PQ}$ 和圓切於 C 點，$\overline{PA}$ 交圓於 A、B 兩點。若 $\overset{\frown}{AC}=160^\circ$，$\overset{\frown}{BC}=80^\circ$，試求$\angle ACQ$、$\angle A$和$\angle P$ 。



$\angle ACQ=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=80^\circ$

$\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=40^\circ$

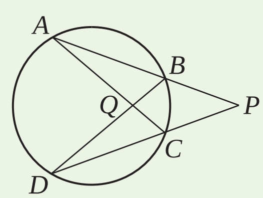
$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BC})=40^\circ$

配套指示器

- 類題熟練本 P41、42
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 15、16 回
- 十分鐘輕鬆考進階篇第 7～9 回
- 無敵大補帖進階篇 P11～14

補充問題

- 如右圖，A、B、C、D 為圓上四點，$\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 交於圓外一點 P，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 交於圓內一點 Q，若 $\angle A=20^\circ$，$\angle AQD=70^\circ$，試求 $\angle P$。（$\angle P=30^\circ$）



數學萬花筒

公切線

日常生活中存在著一些公切線的例子，例如：圖 2-55 中腳踏車的鏈條，連接兩個圓形的齒輪，這條鏈條在兩個切點之間的那一段就是兩圓的外公切線，而這兩個齒輪滾動的方向是一致的。又如圖 2-56 中，滑輪和皮帶的組合，可以把動力從引擎傳到機器上，而這條皮帶在兩個切點之間的那一段是兩滑輪的內公切線，此時兩個輪子滾動的方向則相反。

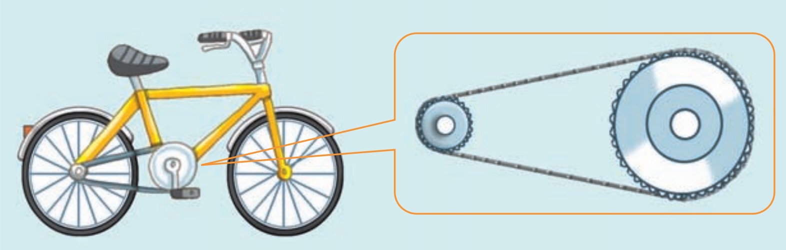


圖 2-55

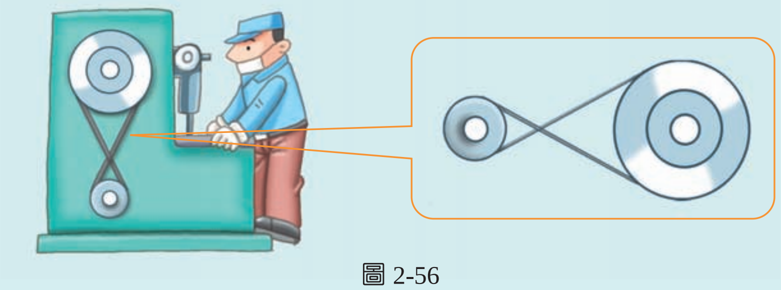


圖 2-56

此外，在運送下半部為圓柱體的醬油瓶時，常將醬油瓶緊密的綁在一起，如圖 2-57 所示，藍色線段即為公切線。

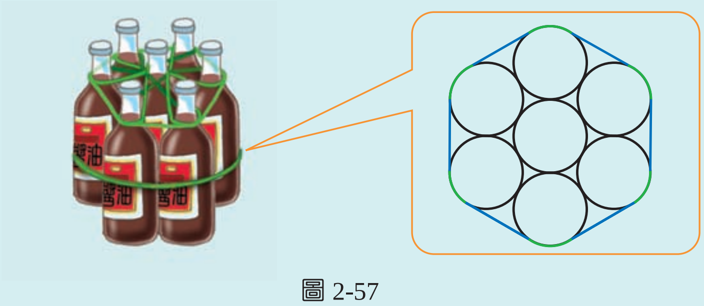


圖 2-57