3-3 三角形的邊角關係

1 三角形三邊長的關係

對應能力指標 8-s-09、8-s-12

在國小時曾學過任意三角形三邊的關係，如圖 3-25，如果我們用小寫英文字母 a、b、c 來表示$\triangle ABC$ 三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長，因為**兩點之間以直線距離為最短**，我們可以得到：

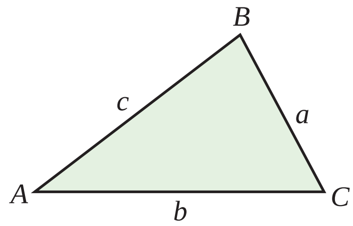


圖 3-25

$$a+b>c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$b+c>a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

$$c+a>b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

也就是說，

三角形任意兩邊長的和一定大於第三邊的長。

由①式 $a+b>c$ 可得 $a>c-b$，

$b>c-a$。

由②式 $b+c>a$ 可得 $b>a-c$，

$c>a-b$。

由③式 $c+a>b$ 可得 $c>b-a$，

$a>b-c$。

整理後可得 $a>c-b$，$a>b-c$，即 $a>|b-c|$。

$b>c-a$，$b>a-c$，即 $b>|c-a|$。

$c>a-b$，$c>b-a$，即 $c>|a-b|$。

也就是說，

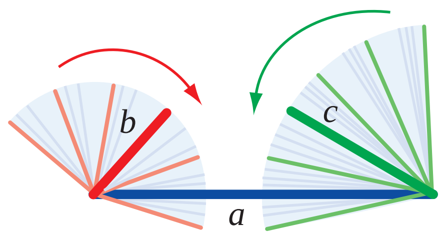
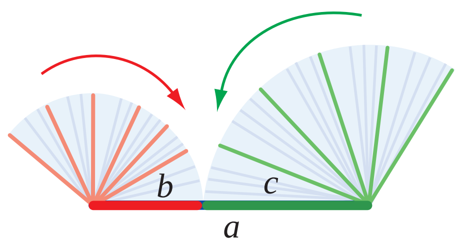
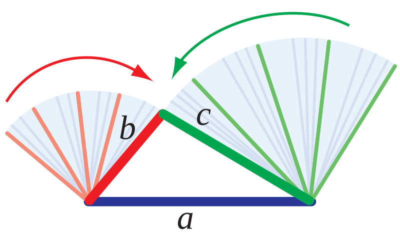
三角形任意兩邊長的差的絕對值一定小於第三邊的長。

因此我們得到：

三角形任一邊長小於另兩邊長的和，大於另兩邊長的差的絕對值。即

｜另兩邊長的差｜＜ 三角形任一邊長 ＜ 另兩邊長的和。

取長度為 a、b、c 的三扣條(依序稱為 a 扣條、b 扣條、c 扣條，其中 a 扣條的長度最長)，將 b、c 兩扣條分別扣在 a 扣條的兩端點，並轉動 b、c 兩扣條，操作過程及結果如下表:

長度關係	操作過程	結果
1.當 $b+c<a$ 時		b、c 兩扣條沒有交點，不能形成三角形。
2.當 $b+c=a$ 時		b、c 兩扣條的交點剛好落在 a 扣條上，不能形成三角形。
3.當 $b+c>a$ 時		b、c 兩扣條有交點，且交點不在 a 扣條上，可以形成三角形。

從前面的操作過程中我們發現：

三條線段中，

1. 如果兩條較短線段長度的和小於或等於最長線段的長度，則這三條線段無法形成一個三角形。
2. 如果兩條較短線段長度的和大於最長線段的長度，就可以形成一個三角形。

例題 1 三角形兩邊之和大於第三邊

配合習作基礎題 1

下列各組數中，哪幾組可以作為三角形的三邊長？

(1) 4、6、7　　(2) 4、7、3　　(3) 4、2、7

解 (1) 由於 $4<6<7$，且 $4+6>7$，
所以 4、6、7 可以作為三角形的三邊長。

(2) 由於 $3<4<7$，且 $3+4=7$，
所以 3、4、7 不可以作為三角形的三邊長。

(3) 由於 $2<4<7$，且 $2+4<7$，
所以 2、4、7 不可以作為三角形的三邊長。

隨堂練習

下列各組數中，哪幾組可以作為三角形的三邊長？ (A)(C)(D)

(A) 5、6、7　　(B) 10、20、30

(C) 4、5、$\sqrt{11}$　　(D) $2a$、$3a$、$4a$（$a>0$）

(A) 由於 $5<6<7$，且 $5+6>7$，
所以 5、6、7 可以作為三角形的三邊長。

(B) 由於 $10<20<30$，且 $10+20=30$，
所以 10、20、30 不可以作為三角形的三邊長。

(C) 由於 $\sqrt{11}<4<5$，且 $\sqrt{11}+4>5$，
所以 $\sqrt{11}$、4、5 可以作為三角形的三邊長。

(D) 由於 $2a<3a<4a$，且 $2a+3a>4a$，
所以 $2a$、$3a$、$4a$ 可以作為三角形的三邊長。

配合習作基礎題 2

例題 2 三角形兩邊之和大於第三邊的應用

設一個三角形的三邊長分別是 4 公分、7 公分、a 公分，若 a 是整數，則滿足此條件的 a 共有多少個？

解 $7-4<a<7+4$ ｜另兩邊長的差｜< 三角形任一邊長< 另兩邊長的和

所以 $3<a<11$

因為 a 是整數，所以 a 可以是 4、5、6、7、8、9、10，

滿足條件的 a 共有 7 個。

隨堂練習

兩線段的長度分別為 5 公分、11 公分，下列哪幾個線段長可以和這兩線段長圍成一個三角形？

6.9 公分、15 公分、20 公分、$\dfrac{29}{3}$ 公分

設另一邊的長為 a 公分，利用「如果兩條較短線段長度的和大於最長線段的長度，就可以形成一個三角形」的概念，

得 $\begin{cases} 11+5>a \\ a+5>11 \end{cases}$，即 $\begin{cases} a<16 \\ a>6 \end{cases}$，所以 $6<a<16$。

題目中，6.9 公分、15 公分、$\dfrac{29}{3}$ 公分皆在 6 公分與 16 公分之間，可以和給定的兩線段圍成一個三角形。

而 20 公分大於 16 公分，故不可以和給定的兩線段圍成一個三角形。

數學小語錄

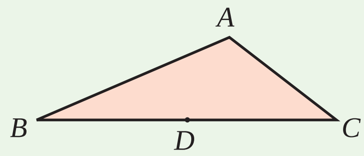
數學是科學不可動搖的基石，促進人類事業進步的豐富泉源。

——巴羅（Issac Barrow，1630-1677）

配合習作基礎題 3

例題 3 三角形兩邊之和大於第三邊的推理

如右圖，$\triangle ABC$ 中，D 點在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AC}=\overline{BD}$，試比較 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的大小關係。



解 $\triangle ABC$ 中，

$\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$， ← 三角形任意兩邊長的和，大於第三邊的長

即 $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BD}+\overline{CD}$。

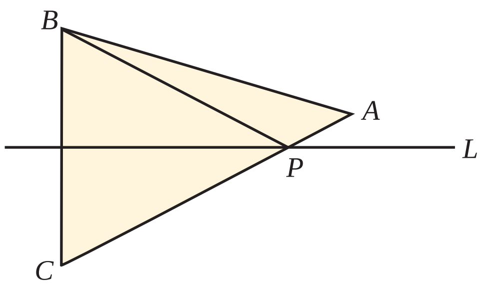
又因為 $\overline{AC}=\overline{BD}$，

所以 $\overline{AB}>\overline{CD}$。

配合習作基礎題 4

隨堂練習

如下圖，直線 L 是 $\overline{BC}$ 的中垂線，$\overline{AC}$ 與直線 L 交於 P 點，試由下列步驟比較 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 的大小。（在下面的空格中填入 $>$、$=$ 或 $<$）



(1) $\overline{PB}$ ___=___ $\overline{PC}$（直線 L 是 $\overline{BC}$ 的中垂線），

(2) $\overline{PA}+\overline{PB}$ ___>___ $\overline{AB}$（三角形任意兩邊長的和一定大於第三邊的長），

(3) $\overline{PA}+\overline{PC}$ ___>___ $\overline{AB}$，

(4) $\overline{AC}$ ___>___ $\overline{AB}$。

2 三角形的外角大於任一內對角

對應能力指標 8-s-12

如圖 3-26，$\triangle ABC$ 為任意三角形，$\angle 1$ 是 $\angle ACB$ 的外角，因為外角等於兩個內對角的和，所以 $\angle 1=\angle A+\angle B$。因為 $\angle A$、$\angle B$ 的度數都是正數，所以 $\angle 1>\angle A$ 且 $\angle 1>\angle B$。

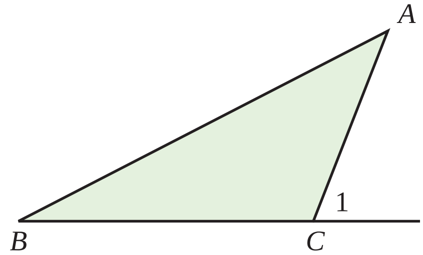


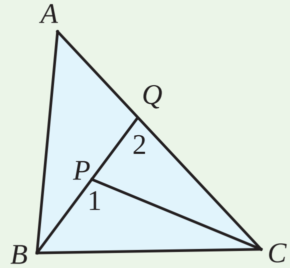
圖 3-26

也就是說，

三角形的外角大於任一內對角。

例題 4 外角大於任一內對角

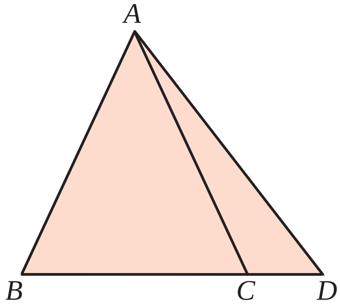
如右圖，$\triangle ABC$ 中，Q 點在 $\overline{AC}$ 上，P 點在 $\overline{BQ}$ 上，試比較 $\angle 1$、$\angle 2$ 和 $\angle A$ 的大小關係。



解 因為 $\angle 1$ 是 $\triangle PQC$ 的外角，所以 $\angle 1>\angle 2$，
因為 $\angle 2$ 是 $\triangle ABQ$ 的外角，所以 $\angle 2>\angle A$，
因此 $\angle 1>\angle 2>\angle A$。

隨堂練習

如右圖，$\triangle ABC$ 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$D$ 在 $\overline{BC}$ 的延長線上，試比較 $\angle B$、$\angle D$ 的大小關係，並說明其理由。



因為 $\overline{AB}=\overline{AC}$，所以 $\angle B=\angle ACB$，
又 $\angle ACB$ 為 $\triangle ADC$ 的外角，
所以 $\angle D<\angle ACB=\angle B$。

3 大邊對大角

對應能力指標 8-s-16

我們已學過等腰三角形兩底角相等，但是一個三角形，若有兩邊不相等，那麼這兩邊的對角哪個比較大呢？

如圖 3-27，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}>\overline{BC}$，那麼 $\angle B$ 和 $\angle A$ 這兩個角，哪一個比較大？

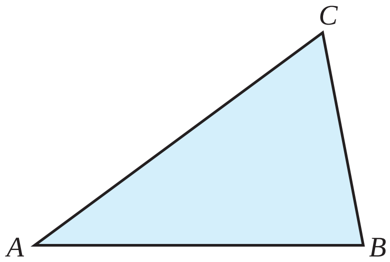


圖 3-27

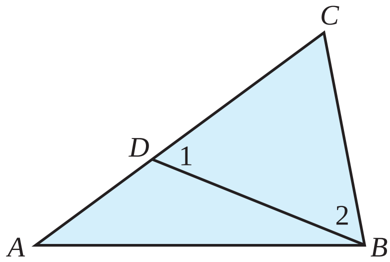


圖 3-28

因為 $\overline{AC}>\overline{BC}$，

我們可以在 $\overline{AC}$ 上找一點 D，使得 $\overline{CD}=\overline{BC}$，如圖 3-28，

連接 $\overline{BD}$，則 $\triangle CDB$ 為等腰三角形，所以 $\angle 1=\angle 2$。

因為 $\angle 1$ 是 $\triangle ADB$ 的外角，所以 $\angle 1>\angle A$。

又從圖形上可知 $\angle CBA>\angle 2$，所以 $\angle CBA>\angle 2=\angle 1>\angle A$。

從上面的說明，我們得到：

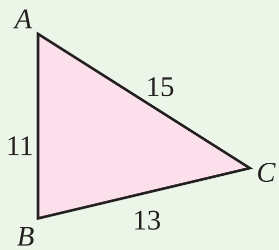
$\triangle ABC$ 中，如果 $\overline{AC}>\overline{BC}$，則 $\angle B>\angle A$。也就是說，

在一個三角形中，若有兩邊不相等，則較長的邊所對的角比較大。

例題 5 大邊對大角

配合習作基礎題 5(1)

如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的長度分別是 11、13、15，試比較 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的大小關係。



解 $\triangle ABC$ 中，因為 $\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$，
所以 $\angle B>\angle A>\angle C$。 大邊對大角

隨堂練習

1. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=7$，$\overline{AC}=8$，則 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 哪一個角最小？

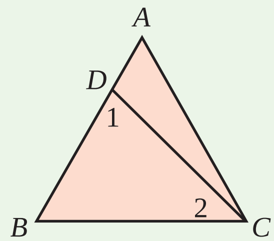
   $\angle C$

2. $\triangle PQR$ 中，$\overline{PQ}=11$，$\overline{QR}=8$，$\overline{PR}=8$，則 $\angle P$、$\angle Q$、$\angle R$ 哪一個角最大？

   $\angle R$

例題 6 大邊對大角的應用

如右圖，$\triangle ABC$ 為正三角形，D 點在 $\overline{AB}$ 上，試比較 $\angle 1$、$\angle 2$ 的大小關係。



解 $\overline{AB}=\overline{BC}$， △$ABC$ 為正三角形

且 $\overline{BD}<\overline{AB}$，所以 $\overline{BD}<\overline{BC}$。

在 $\triangle DBC$ 中，

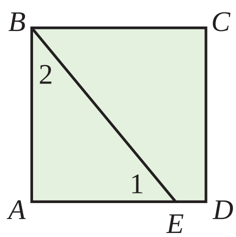
因為 $\overline{BC}>\overline{BD}$，所以 $\angle 1>\angle 2$。 大邊對大角

隨堂練習

如右圖，$ABCD$ 為正方形，E 點在 $\overline{AD}$ 上。

(1) 試比較 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AE}$ 的大小關係。

(2) 試比較 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的大小關係，並說明其理由。



(1) 因為 $ABCD$ 為正方形，所以 $\overline{AE}<\overline{AD}=\overline{AB}$。

(2) 在△ABE 中，因為 $\overline{AE}<\overline{AB}$，

所以利用大邊對大角的性質，得$\angle 1>\angle 2$。

4 大角對大邊

對應能力指標 8-s-16

我們已學過，在一個三角形中，若有兩邊不相等，則比較大的邊所對的角比較大。但是反過來說，在一個三角形中，若有兩個角不相等，那麼這兩個角所對的邊哪一個比較大？

如圖 3-29，$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A>\angle B$，那麼 $\overline{BC}$ 和 $\overline{AC}$ 這兩個邊，哪一個邊比較長？

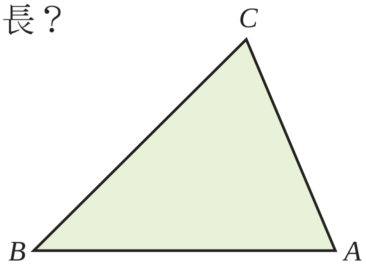


圖 3-29

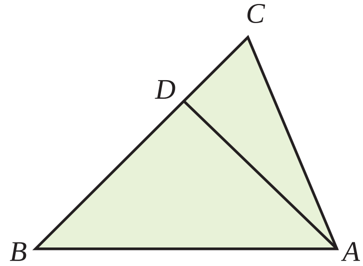


圖 3-30

如圖 3-30，以 $\overline{AB}$ 為一邊作 $\angle BAD$ 等於 $\angle B$，$\angle BAD$ 的另一邊交 $\overline{BC}$ 於 D 點。

因為 $\angle BAD=\angle B$，所以 $\triangle DAB$ 為等腰三角形，因而 $\overline{AD}=\overline{BD}$。

在 $\triangle ACD$ 中，利用三角形任意兩邊長的和大於第三邊的關係得

$$\overline{AD}+\overline{DC}>\overline{AC}，$$

所以 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{DC}>\overline{AC}$。

從上面的說明，我們得到：

$\triangle ABC$ 中，如果 $\angle A>\angle B$，則 $\overline{BC}>\overline{AC}$。也就是說，

在一個三角形中，若有兩角不相等，則較大的角所對的邊較長。

隨堂練習

直角三角形中，哪一個角所對的邊最長？為什麼？

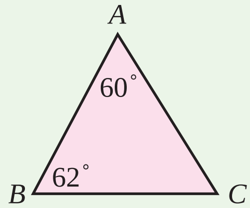
直角。

因為直角三角形的三個內角中，直角最大。

配合習作基礎題 5(2)

例題 7 大角對大邊

$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=62^\circ$，試比較 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 三邊長的大小關係。



解 因為三角形的內角和等於 180°，

所以 $\angle C=180^\circ-60^\circ-62^\circ=58^\circ$，

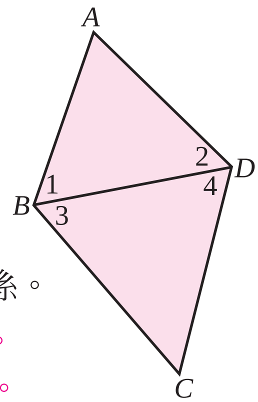
三個內角由大到小為 $\angle B>\angle A>\angle C$。

利用大角對大邊的性質，它們對邊的長度由大到小為 $\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$。

隨堂練習

配合習作基礎題 6

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle 1=60^\circ$，$\angle 2=55^\circ$，$\angle 3=60^\circ$，$\angle 4=65^\circ$。



(1)比較 $\overline{AB}$、$\overline{DA}$ 和 $\overline{BD}$ 的大小關係，並說明其理由。

(2)比較 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 和 $\overline{BD}$ 的大小關係，並說明其理由。

(3)綜合(1)、(2)，寫出 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 和 $\overline{BD}$ 的大小關係。

(1)因為 $\angle A=180^\circ-60^\circ-55^\circ=65^\circ$，所以 $\overline{BD}>\overline{DA}>\overline{AB}$。

(2)因為 $\angle C=180^\circ-60^\circ-65^\circ=55^\circ$，所以 $\overline{BC}>\overline{CD}>\overline{BD}$。

(3) $\overline{BC}>\overline{CD}>\overline{BD}>\overline{DA}>\overline{AB}$。

如圖 3-31，時鐘在 12 點時，時針與分針會重合在一起，此時兩針的夾角為 0 度。從 12 點到 12 點 20 分的過程中，兩針的夾角會慢慢增加。而時針頂端與分針頂端的距離也會慢慢增加。藉由這個觀察結果，我們來比較兩個三角形中，第三個邊與夾角的關係。

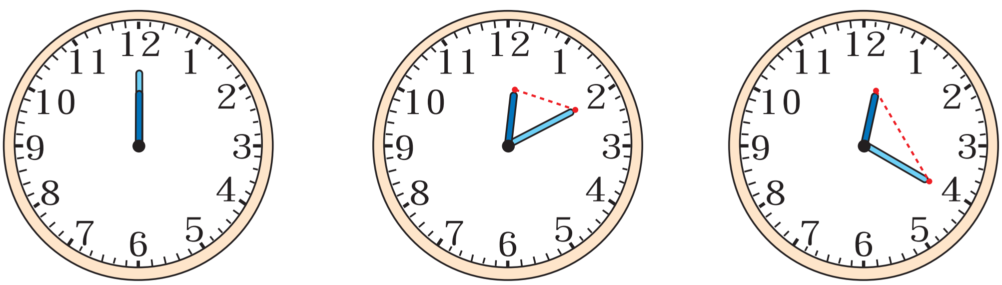


圖 3-31

在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，當 $\overline{AB}=\overline{DE}$、$\overline{AC}=\overline{DF}$ 時，如果 $\angle A=\angle D$，則$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，可推得 $\overline{BC}=\overline{EF}$ 。

可是如果 $\angle A \neq \angle D$ ，如圖 3-32 與圖 3-33，當 $\overline{AB}=\overline{DE}$、$\overline{AC}=\overline{DF}$ 時 ，按照前面兩針的夾角可以知道，如果 $\angle A<\angle D$，則 $\overline{BC}<\overline{EF}$ ，這個定理稱為**樞紐定理**。

$\overline{AB}=\overline{DE}$

$\overline{AC}=\overline{DF}$

$\angle A \neq \angle D$

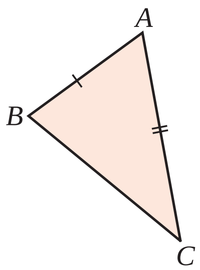


圖 3-32

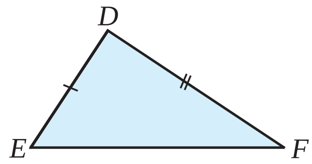


圖 3-33

反過來說，$\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，當 $\overline{AB}=\overline{DE}$、$\overline{AC}=\overline{DF}$ 時，如果 $\overline{BC}<\overline{EF}$ ，則 $\angle A<\angle D$。

從前面的說明，我們發現，當兩個三角形的兩個邊對應相等時：

(1)若兩邊的夾角不相等，則夾角越大者，第三邊越大。

(2)若第三邊不相等，則第三邊越大者，所對夾角越大。

重點回顧

1. **三角形的三邊關係：**

三角形中，

任意兩邊長之和一定大於第三邊的長，

任意兩邊長之差的絕對值一定小於第三邊的長，

｜另兩邊長的差｜< 三角形任一邊長 < 另兩邊長的和。

2. **三角形外角不等關係：** 三角形中，外角大於任何一個內對角。

3. **大邊對大角：** 三角形中，若有兩邊長不相等，則較長邊所對的角較大。

4. **大角對大邊：** 三角形中，若有兩角不相等，則較大角所對的邊較長。

3-3 自我評量

1. 下列各組數中，哪幾組可以作為三角形的三邊長？ (A)(B)(C)(D)

(A) 0.7、0.8、0.9　　(B) 400、500、600

(C) 6、8、$\sqrt{101}$　　(D) $a+2$、$a+3$、$2a+3$（$a>0$）

(A) 由於 $0.7<0.8<0.9$，且 $0.7+0.8>0.9$，所以 0.7、0.8、0.9 可以作為三角形的三邊長。

(B) 由於 $400<500<600$，且 $400+500>600$，所以 400、500、600 可以作為三角形的三邊長。

(C) 由於 $6<8<\sqrt{101}$，且 $6+8>\sqrt{101}$，所以 6、8、$\sqrt{101}$ 可以作為三角形的三邊長。

(D) 由於 $a+2<a+3<2a+3$，且 $(a+2)+(a+3)>2a+3$，所以 $a+2$、$a+3$、$2a+3$ 可以作為三角形的三邊長。

2. 四根吸管長度分別是 2、3、4、5，任選三根吸管試著拼成三角形，請問：

(1) 哪些組合可以拼成三角形？

(2) 哪些組合不能拼成三角形？

四根吸管任選三根的情形有 (2, 3, 4)、(2, 3, 5)、(2, 4, 5)、(3, 4, 5) 四種。

(1) (2, 3, 4)、(2, 4, 5)、(3, 4, 5) 可以拼成三角形。

因為 $2<3<4$，且 $2+3>4$，所以 (2, 3, 4) 可以作為三角形的三邊長。

因為 $2<4<5$，且 $2+4>5$，所以 (2, 4, 5) 可以作為三角形的三邊長。

因為 $3<4<5$，且 $3+4>5$，所以 (3, 4, 5) 可以作為三角形的三邊長。

(2) (2, 3, 5) 不能拼成三角形。

因為 $2<3<5$，且 $2+3=5$，所以 (2, 3, 5) 不可以作為三角形的三邊長。

3. 設一個三角形的三邊長皆為整數，且周長為 13 公分。

(1)如果最長邊是 6 公分，則滿足此條件的三角形有哪些？（答案不只一個）

(2)如果最長邊是 5 公分，則滿足此條件的三角形有哪些？（答案不只一個）

(1)最長邊為 6：

三邊長	理由
(1, 6, 6)	因為 $1<6=6$，且 $1+6>6$
(2, 5, 6)	因為 $2<5<6$，且 $2+5>6$
(3, 4, 6)	因為 $3<4<6$，且 $3+4>6$

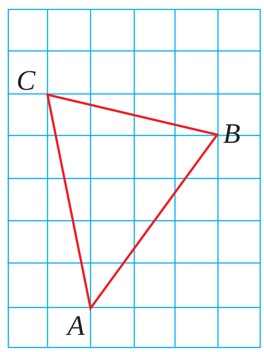
(2)最長邊為 5：

三邊長	理由
(3, 5, 5)	因為 $3<5=5$，且 $3+5>5$
(4, 4, 5)	因為 $4<4<5$，且 $4+4>5$

4. 如右圖，每一小格皆為邊長 1 的正方形，A、B、C 三點皆在格子點上。

(1)計算 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的長度，並比較其大小。

(2)試比較 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的大小關係。



(1) $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

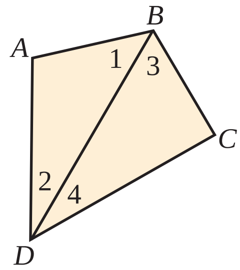
$\overline{BC}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

$\overline{CA}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$

$\overline{CA}>\overline{AB}>\overline{BC}$

(2) $\angle B>\angle C>\angle A$

5. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3.5$，$\overline{DA}=3$。依序回答下列問題：



(1)試比較 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的大小關係，並說明其理由。

(2)試比較 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 的大小關係，並說明其理由。

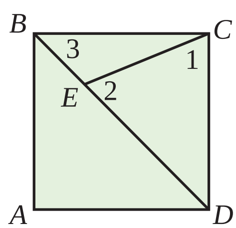
(3)綜合(1)、(2)，寫出 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的大小關係，並說明其理由。

(1)因為 $\overline{DA}>\overline{AB}$，所以$\angle 1>\angle 2$。

(2)因為 $\overline{CD}>\overline{BC}$，所以$\angle 3>\angle 4$。

(3)由(1)、(2)知，$\angle ABC=\angle 1+\angle 3>\angle 2+\angle 4=\angle ADC$。

6. 如右圖，$ABCD$ 為正方形，$\overline{BD}$ 是對角線，E 在 $\overline{BD}$ 上，且 $\overline{DE}=\overline{DC}$。依序回答下列問題：



(1)試比較 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的大小關係，並說明其理由。

(2)試比較 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 的大小關係，並說明其理由。

(3)綜合(1)、(2)，寫出$\angle 1$、$\angle 2$ 和 $\angle 3$ 的大小關係。

(1)因為 $\overline{DE}=\overline{DC}$，所以$\angle 1=\angle 2$。

(2)因為$\angle 2$ 是$\triangle BCE$ 的外角，所以$\angle 2>\angle 3$。

(3)由(1)、(2)知，$\angle 1=\angle 2>\angle 3$。

數學萬花筒

正多邊形的鑲嵌圖案

裝飾圖案如牆頂、天花板、教堂鑲嵌玻璃、壁飾等，常常是用一些相同的圖案來填滿一個相當大的平面，一個圖案緊接著一個，不留任何空隙，這種藝術稱為鑲嵌圖案。

人們常用邊長相等的正多邊形地磚來舖地板或平面，這樣的圖案稱為正多邊形的鑲嵌圖案。最簡單的鑲嵌方法就是都用正方形，因為用四個邊長相同的正方形相連接，就可以完成簡單的鑲嵌圖案。至於用其他正多邊形，鑲嵌方法會有多少種呢？我們來討論幾種漂亮又簡單的圖案。

(1)三種正多邊形：假設這三種正多邊形分別是正 m 邊形、正 n 邊形、正 p 邊形，其每一個內角分別為 $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{m}$、$180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$、$180^\circ-\dfrac{360^\circ}{p}$。

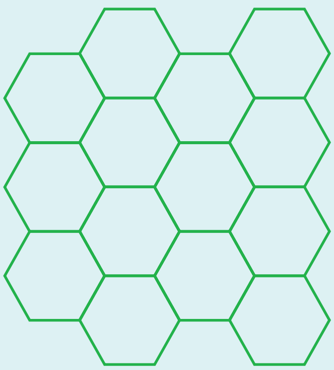
因為 $\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{m}\right)+\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}\right)+\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{p}\right)=360^\circ$，

得 $1-\dfrac{2}{m}+1-\dfrac{2}{n}+1-\dfrac{2}{p}=2$，

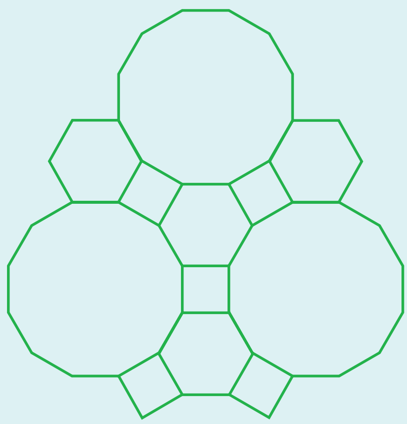
$\dfrac{2}{m}+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{p}=1$，所以 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2}$。

正多邊形 (m, n, p)，如 $(6, 6, 6)$、$(5, 5, 10)$、$(4, 5, 20)$、$(4, 6, 12)$、$(4, 8, 8)$ 等，都是滿足這樣條件的正多邊形（共有 10 組）。其中部分圖案如下：

(6, 6, 6)



(4, 6, 12)



⑵四種正多邊形：假設這四種正多邊形分別是正 m 邊形、正 n 邊形、正 p 邊形、正 r 邊形，其每一個內角分別為 $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{m}$、$180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$、$180^\circ-\dfrac{360^\circ}{p}$、$180^\circ-\dfrac{360^\circ}{r}$。

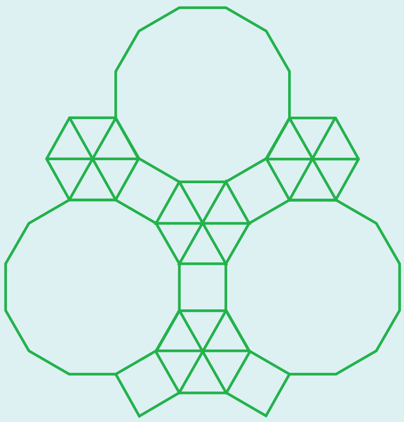
因為 $\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{m}\right)+\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}\right)+\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{p}\right)+\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{r}\right)=360^\circ$，

得 $1-\dfrac{2}{m}+1-\dfrac{2}{n}+1-\dfrac{2}{p}+1-\dfrac{2}{r}=2$，

$\dfrac{2}{m}+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{r}=2$，所以 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=1$。

正多邊形 (m, n, p, r)，如 $(4, 4, 4, 4)$、$(3, 3, 4, 12)$、$(3, 3, 6, 6)$、$(3, 4, 4, 6)$ 等，都是滿足這樣條件的正多邊形（共有 4 組）。其中部分圖案如下：

$(3, 3, 4, 12)$



當然我們也可以用上面的方法來討論五種正多邊形與六種正多邊形的鑲嵌，同學們也可以仿照上面的畫法畫出其他的鑲嵌圖案。