

# 2-4 機率與抽樣

## 1 隨機試驗

對應能力指標 9-d-09


未來的事會怎樣，可以預測嗎？例如：明天上學等公車，5分鐘以內公車會來嗎？運動會那天會下雨嗎？買大樂透會中獎嗎？這些未來的事情，我們通常會用「一定會發生」、「極可能發生」、「發生的機會一半一半」、「相當不可能發生」與「絕對不可能發生」等去做判斷。

在科學研究上，為預測某項事情可能發生的結果，常作多次重複的**試驗**。

下面是正義國中三年丁班投擲骰子試驗的情形：全班有七排，每個人投擲一粒骰子 20 次，各排分別記錄該排同學投擲點數如下表：

表 2-10 正義國中三年丁班各排投擲點數次數分配表

點數	次數(次)						
	第一排 (5人)	第二排 (6人)	第三排 (6人)	第四排 (5人)	第五排 (5人)	第六排 (6人)	第七排 (5人)
1 點	17	23	20	20	19	22	17
2 點	15	22	18	21	18	21	17
3 點	17	16	18	19	18	18	14
4 點	18	22	16	14	16	13	19
5 點	15	19	16	18	15	20	19
6 點	18	18	32	8	14	26	14
合計	100	120	120	100	100	120	100


 教學時數

■ 6 小時


**活動 1** 進行簡單的實驗以了解抽樣的不確定性、隨機性質等初步概念。

 教學眉批


- 利用隨機試驗，讓學生從多次試驗中去體驗投擲骰子的不確定性。
- 盡量讓每個學生都能親自去操作投擲。
- 可以讓學生分享各種事物的不確定性，哪些是可以預測，預測是否能準確。

 教具指示器

- 教學掛圖(II)  
40A-42

 配套指示器

- MPB 統計與機率  
P17~19

 教學眉批

- 利用骰子作隨機試驗，雖然無法讓每個點數出現的次數接近相等，但應該與平均值非常接近。
- 如果有時間可以讓學生做多次試驗，或者聯合同年級學生都做，如此投擲試驗的次數多，每個點數出現的次數會接近相等，且每個點數的相對次數會更接近  $\frac{1}{6}$ 。

將表 2-10 中各排投擲點數的統計次數相加，得到全班投擲點數次數分配表如下表：

表 2-11 全班投擲點數次數分配表


點數	次數(次)
1點	138
2點	132
3點	120
4點	118
5點	122
6點	130
合計	760

將表 2-11 整理成相對次數分配表如下：

表 2-12 全班投擲點數相對次數分配表

點數	次數(次)	相對次數(%)
1點	138	18.16
2點	132	17.37
3點	120	15.79
4點	118	15.53
5點	122	16.05
6點	130	17.11
合計	760	100

從表 2-11 可以發現，各點數出現的總次數差距不大；在表 2-12 中，會發現每一個點數的相對次數都接近於  $\frac{1}{6}$  ( $= 0.166666 \dots \div 16.67\%$ )。如果每個學生投擲 30 次、40 次、100 次、…… 甚至更多，則其相對次數將會更接近  $\frac{1}{6}$ 。

 教具指示器

- 教學掛圖(II)  
40B-42

 隨堂練習

每位同學投擲一枚硬幣 20 次，回答下列問題：請學生依實際情況作答

(1) 每個人記錄出現正面與反面的次數：

結果	次數 (次)
正面	
反面	
合計	20

(2) 統計每排同學出現正面與反面的次數：


各排投擲結果次數分配表

結果	次數 (次)						
	第一排	第二排	第三排	第四排	第五排	第六排	第七排
正面							
反面							
合計							

(3) 將上表整理成相對次數分配表：

結果	次數 (次)	相對次數 (%)
正面		
反面		
合計		100

從隨堂練習中可以發現，出現正面或出現反面的相對次數可能和  $\frac{1}{2}$  ( $=0.5=50\%$ ) 差距不大，表示每個面出現的機會均等。如果每個學生投擲 30 次、40 次、100 次、…… 甚至更多，則相對次數將會更接近  $\frac{1}{2}$ 。

 教學眉批

- 讓每位學生實際投擲硬幣 20 次，看看其出現正面與反面的相對次數。
- 本隨堂練習並無固定答案，莫讓學生抄襲，認為正面、反面出現的次數一定會一樣多。

 基本問題

- 投擲一粒公正的骰子一次，出現偶數點的機率為  $\frac{1}{2}$ ，這個意思為何？
  - 每丟 2 次就會出現 1 次偶數點
  - 每丟 200 次就會出現 100 次偶數點
  - 每丟 2000 次就會出現 1000 次偶數點
  - 當我們投擲足夠多次，出現偶數點的次數就很接近總投擲次數的  $\frac{1}{2}$

(D)

### 教學眉批

■所謂「大數法則」，簡單地說：當可重複的隨機實驗做了無限多次（或做了很多很多次），只要做的次數夠多，實際觀測到的現象（如某一情況出現的比率、某個測量值的平均等），會和母群體的現象一致（對有限而夠大的  $n$  來說，只能說很接近）。

例：假設骰子是公正的（每種點數出現的機會相同）。在相同環境條件下，重複地丟擲骰子並記錄點數。大數法則說：只要你丟擲的次數夠多，實際出現 1 點的次數占投擲次數比率，將接近  $\frac{1}{6}$ ，投擲結果點數平均將接近理論值 3.5

$$\left( = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \right).$$

當試驗次數愈來愈多時，試驗的結果將接近某一個定值。例如：投擲一枚拾元硬幣可能出現的情形有正面或反面 2 種，當投擲非常多次時，正面或反面發生的機會都趨於相等，且出現次數與投擲總次數的比值接近  $\frac{1}{2}$ ，我們就說正面或反面發生的**機率**都是  $\frac{1}{2}$ 。



圖 2-15

相同道理，投擲一粒骰子可能出現的點數有 1 點、2 點、3 點、4 點、5 點與 6 點等 6 種，當投擲非常多次時，每一種點數發生的機會都趨於相等，且出現次數與投擲總次數的比值接近  $\frac{1}{6}$ ，我們就說每一種點數發生的機率都是  $\frac{1}{6}$ 。



圖 2-16

假設一個試驗所有可能出現的結果有  $n$  種，若每一種結果發生的機會都相等，則每一種結果發生的機率是  $\frac{1}{n}$ ，若每一種結果發生的機會不完全相等時，則每一種結果發生的機率不是  $\frac{1}{n}$ 。例如：投擲一枚圖釘，由於圖釘構造的關係，針尖朝上或朝下的機率不是  $\frac{1}{2}$ 。



圖 2-17

在本教材中，投擲硬幣或骰子時，都假設每一種可能出現情形的機率相等，並以「公正的」強調。

在試驗中，任何想要觀察的情況都可稱為**事件**，事件可能發生也可能不會發生，例如：投擲一粒公正的骰子一次，「出現偶數點」、「出現奇數點」、「出現 1 點」、「出現 7 點」、……等都是事件。

投擲一粒公正的骰子所有可能的結果有 6 種，若其中  $A$  事件表示出現的點數為偶數，則投擲時如果出現的點數是 2 點、4 點或 6 點，我們就說這個事件發生了。因為  $A$  事件可能的結果有 3 種，所以  $A$  事件發生的機率為  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

如果一個試驗所有可能的結果有  $n$  種，且這  $n$  種結果發生的機會都相等，若  $A$  事件包含了其中  $m$  種 ( $m \leq n$ ) 可能的結果，我們就說  $A$  事件發生的機率是  $\frac{m}{n}$ 。

$$A \text{ 事件發生的機率} = \frac{A \text{ 事件所含可能結果的個數}}{\text{試驗所有可能結果的個數}}$$

### 例題 1 求擲骰子的機率

投擲一粒公正的骰子，回答下列問題：

- (1) 出現 3 點的機率是多少？
- (2) 出現奇數點的機率是多少？

**解** (1)  $\because$  每一面出現的機率都一樣，

所有可能的結果有 1、2、3、4、5、6 等 6 種，  
故出現 3 點的機率是  $\frac{1}{6}$ 。

(2)  $\because$  點數為奇數者有 1、3、5 等 3 種，  
 $\therefore$  出現奇數點的機率是  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

**活動 2** 以具體情境介紹機率的觀念。

### 教學眉批

- 在教 Laplace 古典機率時，請特別注意每個結果出現的機會都一定要相等。
- 學生只要會基礎的機率即可，莫教幾何機率、條件機率與貝氏定理等高中才學的機率概念。
- 題目設計的難度最好能用樹狀圖表達所有可能的結果即可。

### 基測試題

- 92 基測 I 第 2 題
- 95 基測 I 第 4 題

### 基本問題

- 建華調查某個村落的姓氏如下表，

姓氏	王	陳	張	李	黃	何	其他	合計
人數(人)	120	150	100	80	60	40	50	600

如果建華任意找一個人，則：

- (1) 此人姓陳的機率是多少？ $\frac{1}{4}$
- (2) 此人不姓陳的機率是多少？ $\frac{3}{4}$

### 配套指示器

- 類題熟練本 P47
- 歷屆基測試題 P24、26


 隨堂練習

投擲一粒公正的骰子，回答下列問題：

- (1) 點數大於 4 點的機率是多少？
- (2) 點數小於 4 點的機率是多少？

(1) 大於 4 點有 5、6， $\therefore$  機率 =  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

(2) 小於 4 點有 1、2、3， $\therefore$  機率 =  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

 基測試題

- 94 基測 II 第 2 題

 教學眉批

- 撲克牌的機率問題很多樣，教師宜注意不要出現一次抽取多張撲克牌的題型，那是高中範圍的題目。

 例題 2 求抽撲克牌的機率

搭配習作 P38 基礎題 3

一副撲克牌有 52 張（不含鬼牌），從撲克牌中任取 1 張，回答下列問題：

- (1) 抽到方塊 2 的機率是多少？
- (2) 抽到  $K$ 、 $Q$ 、 $J$  的機率是多少？

**解** (1) 一副撲克牌有 52 張，每張的花色和點數都不同，

從這副牌中任取 1 種花色和點數的機率為  $\frac{1}{52}$ ，

$\therefore$  抽到方塊 2 的機率是  $\frac{1}{52}$ 。

(2) 一副撲克牌，有四種花色，每一種花色都有  $K$ 、 $Q$ 、 $J$  各 1 張，

$\therefore$  一副撲克牌共有 12 張牌是  $K$ 、 $Q$ 、 $J$ ，


故抽到  $K$ 、 $Q$ 、 $J$  的機率是  $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ 。

 隨堂練習

一副撲克牌有 52 張，從撲克牌中任取 1 張，試求抽到花色是黑桃的機率。

花色是黑桃有 13 張，

$\therefore$  機率 =  $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ 。

 配套指示器

- 類題熟練本 47、48
- 歷屆基測試題 P26

 基本問題

- 有 9 支籤分別標示：2、2、3、3、3、4、4、4、4，每支籤被抽到的機會皆相等，任意抽一支籤，求：

(1) 抽到是奇數的機率。  $\frac{1}{3}$

(2) 抽到是質數的機率。  $\frac{5}{9}$

(3) 抽到 1 號的機率。 0



一袋中有 10 個相同大小的球，分別是 5 個紅球、3 個黃球與 2 個綠球，每一球被取出的機會都相等，如果從袋中任意取出一球，那麼取出的球是紅球的機率是否為  $\frac{1}{3}$  呢？

因為每一球被取出的機會都相等，且袋中有 5 個紅球，所以從這 10 球中，任取一球是紅球的機率是  $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ 。

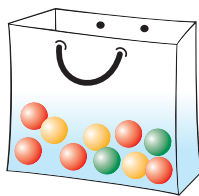


圖 2-18

### 例題 3 求取球的機率

搭配習作 P38 基礎題 4

一個袋子裡有 10 個相同大小的球，分別是 7 個紅球、3 個白球，每個球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則此球是紅球的機率是多少？

**解** ∵ 每一球被取到的機會相等，且袋中有 7 個紅球，  
∴ 從這 10 個球取出一球是紅球的機率是  $\frac{7}{10}$ 。

### 隨堂練習

一個袋子裡有一些相同大小的球，分別是 3 個紅球、4 個白球、5 個黑球，每個球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，試求此球是黑球的機率。

黑球有 5 個，共 12 個球，  
∴ 抽中黑球的機率 =  $\frac{5}{12}$ 。



### 數學小語錄

數學是一種別具匠心的藝術。

——哈爾莫斯 (Paul Halmos, 1916-2006)



### 延伸問題

- 開班會時，從男生 4 人和女生 3 人中，任選一人擔任主席，每個人被選到的機會均等，則男生擔任主席的機率是多少？  $\frac{4}{7}$
- 從「pallmall」一字中任選一個字母，每個字母被選到的機會均等，則選到字母「l」的機率是多少？  $\frac{1}{2}$
- 從「我為人人人人為我」中任選一個字，每個字被選到的機會均等，則選到的字是「為」的機率是多少？  $\frac{1}{4}$



### 配套指示器

- 類題熟練本 P48
- 十分鐘輕鬆考基礎篇 第 23 回
- 歷屆基測試題 P24、25、27、28

### 教學眉批

- 學生容易誤會為袋中有紅球、黃球、綠球三種，從袋中任取一球，取出紅球的機率為  $\frac{1}{3}$ 。

### 基測試題

- 92 基測 II 第 30 題
- 92 基測 II 第 31 題
- 93 基測 II 第 6 題
- 96 基測 II 第 10 題
- 97 基測 II 第 7 題

### 教學眉批

- 在考慮機率問題時，為了每個被抽到的機會均等，故不管球的顏色是否相同，都要當做不同的情況來處理。如：「有 5 個相同的英文書、3 本相同的數學書、2 本相同的國文書，任取一本，取出為數學書的機率是多少？」與「有 5 個相異的英文書、3 本相異的數學書、2 本相異的國文書，任取一本，取出為數學書的機率是多少？」這兩題機率都是相同的。

## 教學眉批

- 利用樹狀圖來做排列組合與機率，是學習有限數學非常好的方法。
- 提醒學生要有耐心的用樹狀圖將各種情形一一排出來。

## 2 樹狀圖

對應能力指標 9-d-09

對於同時討論兩種不同事件同時出現的機率，我們可以用下面的方法來討論，例如：同時投擲 1 枚公正的硬幣與 1 粒公正的骰子，請問硬幣出現正面且骰子出現點數為 3 的機率是多少？

投擲 1 枚公正的硬幣所有可能的結果有 2 種，可以用圖 2-19 表示；投擲 1 粒公正的骰子所有可能的結果有 6 種，可以用圖 2-20 表示；像這樣的圖稱為**樹狀圖**。

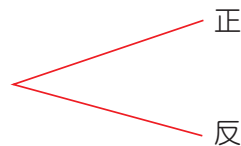


圖 2-19

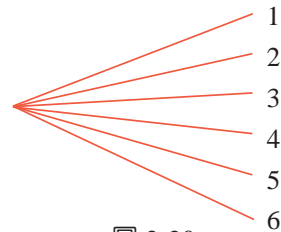


圖 2-20

而同時投擲 1 枚公正的硬幣與 1 粒公正的骰子，硬幣出現哪一面和骰子出現哪一個點數並不會互相影響，所有可能的結果共有 12 種（每一種結果出現的機會皆均等），我們可以用樹狀圖表示如下：

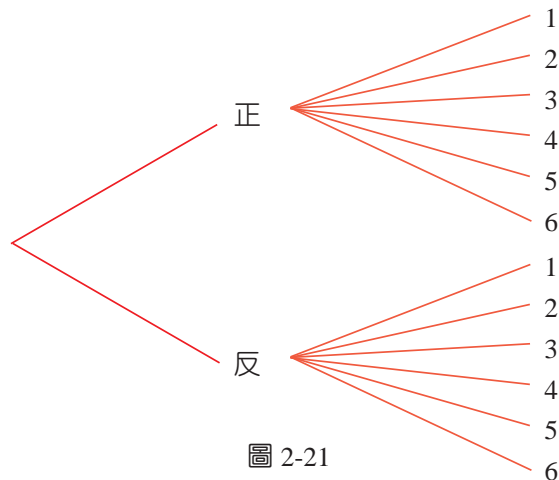


圖 2-21

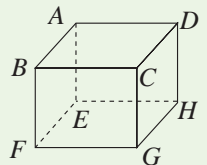
也可以用數對表示如下：

(正, 1)、(正, 2)、(正, 3)、(正, 4)、(正, 5)、(正, 6)、  
(反, 1)、(反, 2)、(反, 3)、(反, 4)、(反, 5)、(反, 6)。

所以硬幣出現正面及骰子出現點數為 3，即(正, 3)的機率是  $\frac{1}{12}$ 。

## 延伸問題

1. 如右圖，由一個正六面體的一頂點 A 沿著稜線走到對角線的另一頂角 G，每一個頂點只能經過一次，有幾種走法？**18 種**
2. 丟一枚公正的硬幣三次，會有多少種可能的情況發生？**8 種**
3. 某人由高雄到臺中有 3 種方法，由臺中到臺北有 2 種方法，則此人由高雄經臺中到臺北，一共有幾種走法？**6 種**



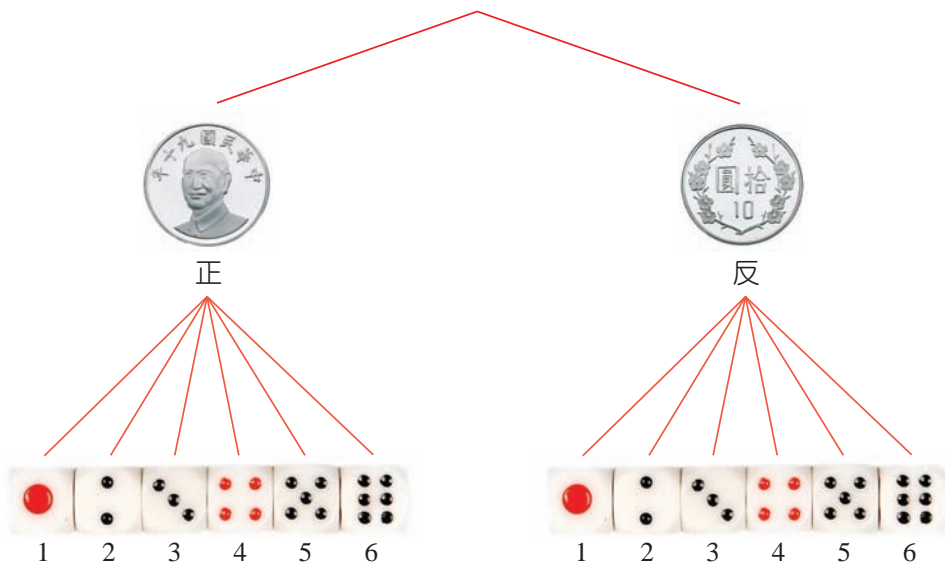


### 例題 4 求兩隨機試驗的合併機率

搭配習作P37 基礎題1

同時投擲一枚公正的硬幣與一粒公正的骰子，試求出現硬幣為反面且骰子點數為偶數的機率。

**解** 同時投擲 1 枚公正的硬幣與 1 粒公正的骰子，  
 所有可能的結果共有 12 種，  
 其中出現硬幣為反面且骰子點數為偶數的情形有 3 種，  
 即：(反, 2)、(反, 4)、(反, 6)。  
 $\therefore$  硬幣出現反面且骰子點數為偶數的機率是  $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ 。



### 隨堂練習

同時投擲 1 枚公正的硬幣與 1 粒公正的骰子，則出現硬幣為反面且骰子點數為 3 的倍數的機率是多少？

出現反面且為 3 的倍數有 (反, 3)、(反, 6)，

$\therefore$  機率 =  $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

### 挑戰問題

■ 同時擲出兩枚硬幣和一個公正的骰子，求：

(1) 出現硬幣為一正面一反面，且骰子點數為偶數的機率。 $\frac{1}{4}$

(2) 出現硬幣兩個都是反面，且骰子點數為質數的機率。 $\frac{1}{8}$

### 教學眉批

- 結合硬幣與骰子的樹狀圖，樣本空間共有  $2 \times 6 = 12$  個樣本點，每一個樣本點出現的機會均等。
- 可以練習其他的樹狀圖題目，但不宜太難。

■ 類題熟練本 P48、49

### 配套指示器

### 教學眉批

#### ■ 補充高中機率：

(1)  $A$ ：事件

$V$ ：全部

$\phi$ ：空事件

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(V)}$$

$n(V)$ ： $V$ 集合的個數

$n(A)$ ： $A$ 集合的個數

(2)  $0 \leq P(A) \leq 1$

(3)  $P(A) = 1$

(4)  $P(\phi) = 0$

### 例題5 求服裝搭配的機率

博欽有紅、黃、藍、綠四件不同顏色的上衣， $A$ 、 $B$ 、 $C$  三條不同品牌的牛仔褲，任一件上衣都可以和任一條牛仔褲搭配，回答下列問題：

(1) 今天博欽要外出，想從四件上衣中任意選出一件、從三條牛仔褲中任意選出一條，則共有多少種選擇方式？

(2) 若每一件上衣被選到的機會均等，每一條牛仔褲被選到的機會也均等，則選到紅色上衣搭配  $A$  牌牛仔褲的機率是多少？

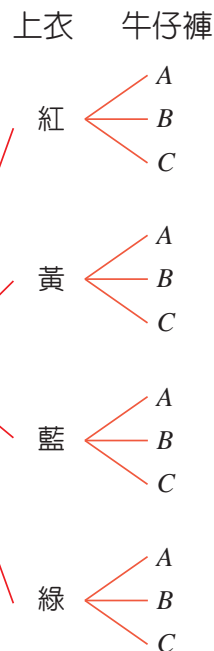
**解** (1) 由樹狀圖可知，

$$4 \times 3 = 12，$$

共有 12 種選擇方式。

(2) 由樹狀圖可知，

選到紅色上衣搭配  $A$  牌牛仔褲的機率是  $\frac{1}{12}$ 。



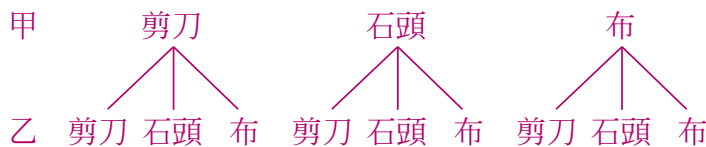
### 隨堂練習

甲、乙二人進行猜拳遊戲，如果兩人出剪刀、石頭或布的機會均等，試問猜拳一次甲贏乙的機率是多少？（遊戲規則為：剪刀贏布、布贏石頭、石頭贏剪刀）

由樹狀圖可知，

甲贏乙的機率為：

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}。$$



### 配套指示器

■ 類題熟練本 P49

### 挑戰問題

■ 有甲、乙兩袋球，甲袋內有 4 顆白球、4 顆紅球，乙袋內有 6 顆白球、3 顆紅球。小瑜任意選取甲、乙其中一袋，並從中抽取 1 球，則她選擇乙袋，並抽出白球的機率是多少？  $\frac{1}{3}$

### 例題 6 求路徑選擇的機率

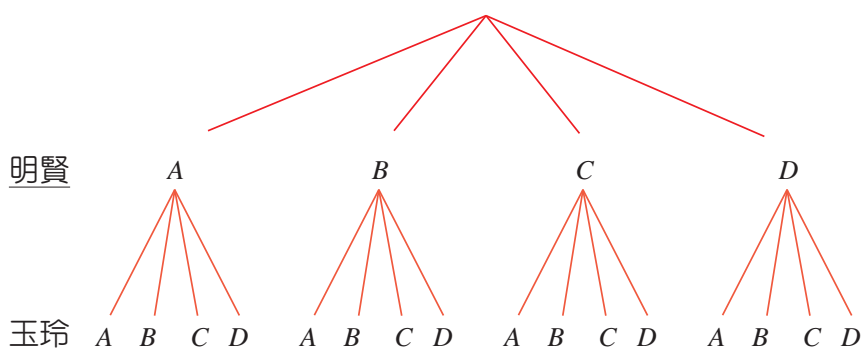
已知甲、乙兩城鎮之間共有  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四條道路，明賢與玉玲同時分別自甲、乙兩城鎮出發，走路往另外一個城鎮，如果兩人選擇任何一條道路的機會均等，試問兩人在路上碰面的機率是多少？

**解** 從樹狀圖可知，

$$4 \times 4 = 16,$$

兩人選擇道路的情形共有 16 種，

$$\therefore \text{兩人在路上碰面的機率是 } \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$



### ! 基測試題

- 97 基測 I 第 22 題

### 教學眉批

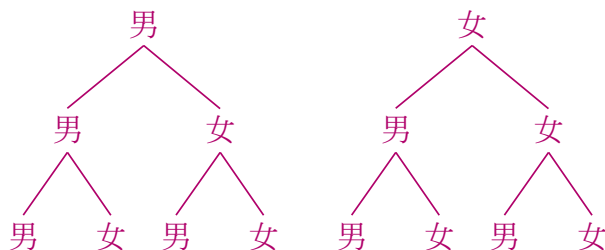
- 利用樹狀圖知道每一個路徑的選擇皆相同，亦可把路徑當作坐標來思考，例如：  
( $A$  條路,  $B$  條路)、  
( $C$  條路,  $D$  條路) 等。

### 隨堂練習

假設男孩與女孩出生的機會均等，在一個有 3 名小孩的家庭中，3 名皆是女孩的機率是多少？

由樹狀圖可知，

$$3 \text{ 名皆是女孩的機率為 } \frac{1}{8}.$$



### 延伸問題

- 甲地到乙地的路徑有陸路 2 條、水路 2 條，乙地到丙地的路徑有陸路 3 條、水路 3 條，則小智從甲地經過乙地到丙地共有多少種走法？ **24 種**

### 配套指示器

- 類題熟練本 P49
- 歷屆基測試題 P28

### 教學眉批

- 同時投擲兩粒公正的骰子，也可以用樹狀圖呈現其 36 種情形。
- 要說明投擲兩粒公正的骰子時，可以把兩個骰子視做不同顏色的骰子，如此每個出現的機會才會均等。

我們可以利用樹狀圖來討論同時投擲兩粒公正骰子的情形，算一算點數和會有 2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12 等 11 種，而點數和為 3 點的機率是多少？可畫成樹狀圖如圖 2-22：

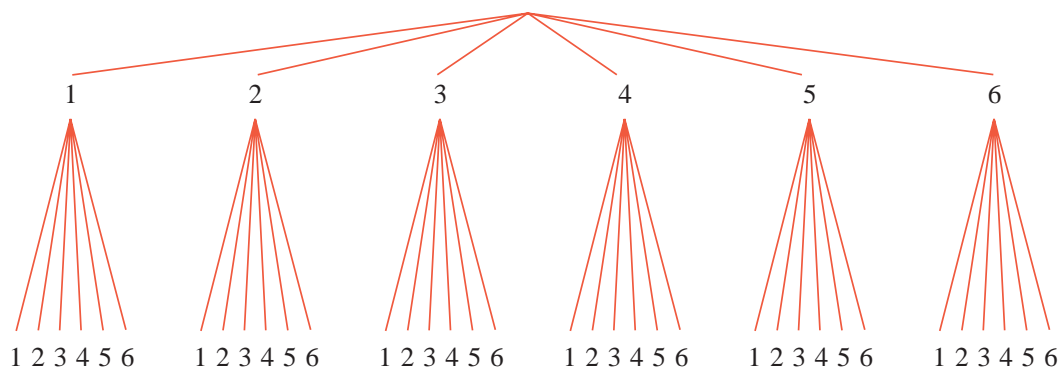


圖 2-22

由上圖可發現：投擲兩粒公正骰子的情形共有 36 種，每一種情形出現的機會均等，所以點數和為 3 點的機率是  $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ 。

對於投擲兩粒公正的骰子，也可以用數對來表示，我們用兩個特殊設計骰子來說明：一個骰子的點數都是藍色，稱為藍色骰子；另一個骰子的點數都是紅色，稱為紅色骰子。用數對  $(a, b)$  記錄這兩個骰子出現的點數，數對前面的數字表示藍色骰子出現的點數，後面的數字表示紅色骰子出現的點數。

所以同時投擲兩粒公正的骰子，可能會出現的數對有 36 種如下：

$(1, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(1, 4)$ 、 $(1, 5)$ 、 $(1, 6)$ 、  
 $(2, 1)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(2, 4)$ 、 $(2, 5)$ 、 $(2, 6)$ 、  
 $(3, 1)$ 、 $(3, 2)$ 、 $(3, 3)$ 、 $(3, 4)$ 、 $(3, 5)$ 、 $(3, 6)$ 、  
 $(4, 1)$ 、 $(4, 2)$ 、 $(4, 3)$ 、 $(4, 4)$ 、 $(4, 5)$ 、 $(4, 6)$ 、  
 $(5, 1)$ 、 $(5, 2)$ 、 $(5, 3)$ 、 $(5, 4)$ 、 $(5, 5)$ 、 $(5, 6)$ 、  
 $(6, 1)$ 、 $(6, 2)$ 、 $(6, 3)$ 、 $(6, 4)$ 、 $(6, 5)$ 、 $(6, 6)$ 。

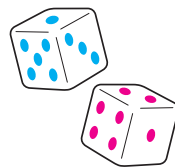


圖 2-23

其中點數和為 3 的事件只有  $(1, 2)$  與  $(2, 1)$  兩種，所以點數和為 3 的機率是  $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ 。

### 延伸問題

- 同時投擲兩粒公正的骰子，求：
  - 點數和為偶數的機率。 $\frac{1}{2}$
  - 點數和大於 10 的機率。 $\frac{3}{36}$
  - 兩個骰子點數相差 1 的機率。 $\frac{5}{18}$

### 例題 7 求擲兩粒骰子的機率

搭配習作P37 基礎題2

同時投擲兩粒公正的骰子，回答下列問題：

- (1) 點數和為 7 的機率是多少？
- (2) 點數和大於 9 的機率是多少？

**解** (1) 投擲兩粒公正的骰子，共會出現 36 種情形，點數和為 7 的情形有：

(1, 6)、(2, 5)、(3, 4)、(4, 3)、(5, 2)、(6, 1) 等 6 種，

故點數和為 7 的機率是  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 。

(2) 點數和大於 9 的情形只有 10 點、11 點與 12 點，

點數和為 10 的情形有：(4, 6)、(5, 5)、(6, 4)，共 3 種，

點數和為 11 的情形有：(5, 6)、(6, 5)，共 2 種，

點數和為 12 的情形有：(6, 6)，只有 1 種

∴ 出現點數和大於 9 的情形共有 6 種，其機率是  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 。

### 隨堂練習

同時投擲兩粒公正的骰子，試求下列各點數和的機率。

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

因為任何事件可能結果的個數一定小於或等於試驗中所有可能結果的個數，所以任何事件發生的機率都是一個從 0 到 1 的數值，若事件的機率是 1，表示一定會發生；若事件的機率是 0，表示肯定不會發生。例如：投擲一粒公正的骰子，「點數小於 7」一定會發生，故機率是 1；而「點數大於 7」一定不會發生，故機率是 0。

### 基本問題

- 投擲一粒公正骰子三次，求：
  - (1) 第一次出現 6 點的機率。 $\frac{1}{6}$
  - (2) 第三次出現 1 點的機率。 $\frac{1}{6}$

### 配套指示器

- 類題熟練本 P50
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 24 回
- 歷屆基測試題 P27、28

### 基測試題

- 95 基測 II 第 26 題
- 96 基測 I 第 21 題
- 98 基測 I 第 19 題

### 教學眉批

- 若事件一定會發生，其機率是 1；若事件一定不會發生，其機率是 0。
- 設某事件發生的機率是  $P$ ，則  $0 \leq P \leq 1$ 。

**活動3** 學生在抽樣實驗中，經驗樣本被抽到的機會一樣多的可能。

### 教學眉批

- 讓學生由實際生活中了解普查與抽樣調查的不同。
- 藉由抽樣調查可了解整個群體的特性。但要注意抽樣的方法，在本書 P67-6、67-7 的參考資料有介紹其四種方法：
  - (1) 簡單隨機抽樣。
  - (2) 系統抽樣。
  - (3) 分層隨機抽樣。
  - (4) 部落抽樣。
- 藉由魚池中的魚，任意抓取（抽樣），再放回去重新再抓取來估算池中魚的數目。這種方法就是抽樣調查的精神，在生物統計學上常用此方法。

## 3 抽樣調查

對應能力指標 9-d-10

對研究的對象作全面性的調查稱為**普查**。例如：政府每十年舉行的戶口普查、每位新生入學所做的健康檢查等都是普查。

另外，如果了解全國人民對某件事情的看法，若用普查的方式調查，則所需要的人力、物力會非常龐大。可是如果我們只從中抽取一部分來調查，而每個人被抽到的機率都相同，那麼這些人的看法就能代表全部人的看法。像這樣，對研究的對象不進行全面性的調查，只從中抽取一部分對象進行調查，稱為**抽樣調查**。例如：調查電視臺的收視率、調查候選人的支持度等都是抽樣調查。而全體被研究的對象，稱為**母群體**；被抽取的對象稱為**樣本**。

### 隨堂練習

試判斷下面何者適合用普查？何者適合用抽樣調查？

- |                |                  |
|----------------|------------------|
| (1) 新生入學時健康檢查  | (2) 電視臺收視率調查     |
| (3) 調查全國人民平均收入 | (4) 調查全國國中學生的零用錢 |

普查：(1)。

抽樣調查：(2)、(3)、(4)。

生物學上也常利用這樣的方法來估計某封閉區域的生物數量，例如：想知道某一個池塘內魚群的數量，因為魚在池中會任意游動，無法逐一點數，所以放入經人工標記的魚群於池中，再隨機抓取部分（代表抽樣），數數看有多少標記的魚，由此估算池中魚群的數目。

例如：從池中抓取 28 條魚，將其作記號，再放入池中，經一段時間後，再抓取 40 條魚，其中有標記的魚有 5 條，假設池中有  $x$  條魚，

$$\text{則 } \frac{28}{x} = \frac{5}{40}$$

$$x = 224$$

所以推估池中約有 224 條魚。

### 基本問題

- 下列何者適合用抽樣調查？
    - (A) 全國戶口調查
    - (B) 全班同學的尿液檢查
    - (C) 2010 年職棒直播的收視率
    - (D) 機場出入境的安全檢查
- (C)

**例題 8** 按照比例推算

搭配習作P39 基礎題5

有一個袋子裝了若干數量的綠豆，現在將 20 顆紅豆放入袋中，攪拌均勻後，任意抓取一些，共抓取 48 顆綠豆與 3 顆紅豆，則此袋中原來大約有綠豆多少顆？

**解** 設原來大約有綠豆  $x$  顆

$$\frac{48}{x} = \frac{3}{20}$$

$$3x = 960$$

$$x = 320$$

所以袋中原來大約有綠豆 320 顆。

**隨堂練習**

有一個袋子裡裝了若干數量的白色棋子，現在將 10 顆黑色棋子放入袋中，均勻攪拌後，任意抓取一些，共抓取 2 顆黑色棋子與 13 顆白色棋子，則此袋中白色棋子原來大約有幾顆？

設袋中原有白色棋子  $x$  顆，

$$x : 10 = 13 : 2$$

$$x = 65$$

故原有白色棋子約 65 顆。

**數學小語錄**

數學給了各種精密自然科學一定程度的可靠性，沒有數學，它們不可能獲得這樣的可靠性。

——愛因斯坦 (Albert Einstein, 1879-1955)

**基本問題**

1. 將池中的魚先抓取 100 條，將其作記號，然後放入池中，經一段時間後，再抓取 60 條，發現其中有標記的魚有 12 條，依此估計池塘中大約有多少條魚？

大約有 500 條魚

2. 小明把黑芝麻與白芝麻均勻混合在一起，已知黑芝麻有 60 粒，隨手抓起一把仔細數其數目，發現其中有白芝麻 96 粒，黑芝麻 8 粒，依此估計白芝麻有多少粒？

大約有 720 粒

**配套指示器**

- 類題熟練本 P50
- 十分鐘輕鬆考基礎篇 第 25 回

**教學眉批**

- 按照比例求估計值是生活中常用的一種概算方法。例如：遊行的人數、園遊會的人數等，都可以用一區塊的人數來估計總人數。



### 教學眉批

- 本書對於亂數表的使用，是用每一個數字為一列一行，水平方向一個一個數，有些書是用垂直方向來數的。但這些方法都是正確的，因為亂數表本來就只是提供一堆任意的數字而已。
- 在電腦程式設計上，如 BASIC 等會以 ran 指令取用亂數。
- 抽樣調查、抽籤決定誰錄取等有時也會用亂數表來決定。

## 4 亂數表

對應能力指標 9-d-10

抽取樣本時，為了使母群體中每個樣本被抽中的機會均等，數學上常使用**亂數表**來決定被調查的對象。

亂數表的產生是將數字 0~9 隨機抽取，並記錄抽取的結果，因此沒有一個標準的亂數表，通常會利用電腦產生亂數，而為了使用上的方便，常以四位為一組列出，格式如下表所示。

		亂數表									
	第三行 ↓	1846	1703	9350	1460	2465	3442	5333	2727	7550	5185
		3197	8521	9359	5423	9357	8420	6748	0855	0593	2745
第三列 →		8114	1012	7434	3253	6049	1274	1262	2482	0911	4107
		6196	0513	8363	2656	2185	3976	1162	4267	8575	4929
		0409	3120	4152	0278	8664	7446	0874	4708	3137	8875
		6557	9823	6409	8454	8002	7884	5524	6923	1367	1769
		9598	3662	1430	1038	0969	4152	2551	3655	6465	8846
		2726	9960	5904	6314	5355	5939	3533	0820	0443	9500
		4479	1694	6459	5609	9346	3967	8191	5523	3166	3660
		5980	3973	4816	6033	3889	5984	8041	6336	3663	7798
		9875	9078	3677	4599	4560	5312	4007	1019	2995	7163
		3414	1527	4546	5786	9260	5559	5065	9596	9527	6593
		7956	2173	5799	5857	8454	8506	5172	3532	0325	7845
		9362	0122	6163	4431	0909	5839	9577	1564	3592	8065
		8897	7091	1065	6914	5095	3739	8917	5662	3059	5390
		7102	7241	6347	1684	2037	4447	1545	5246	4420	2841
		2530	6896	0005	8084	7587	8933	5700	9396	1755	0248
		9810	5666	9770	6583	1349	1955	4680	0178	4299	5543
		6441	9985	7487	0031	5095	5824	4609	2781	6267	9328
		1584	2151	8011	7911	7148	9381	5935	4852	5909	0798

### 教具指示器

- 教學掛圖(I)  
1B-4、2B-4、  
3B-4、4B-4

### 基本問題

- 三年甲班有 45 位同學，校慶結束後，老師利用課本第 128 頁的亂數表，自第一列第一行開始，由左向右，選出 10 位學生留下來打掃，則這 10 位學生的座號分別是幾號？**18、17、03、14、24、34、42、33、27、31 號**

### 例題 9 使用亂數表

搭配習作P39 基礎題6

大信國中三年級共 600 位學生，從 001 號編到 600 號，校方抽出 10 位學生贈送免費的電影票，若利用第 136 頁的亂數表，自第三行第三列開始，由左向右，抽出 10 位學生，則這 10 位學生的編號分別是多少？

**解**：∵全校三年級共 600 位學生，因此在使用亂數表時，以 3 位一組，超過 600 或重複出現的數字予以刪除。

依題目要求，自第三行第三列開始，由左向右每 3 位一數，可得：

141、012、743、432、536、049、127、412、622、482、

091、141、076、……

其中 743、622 皆超過 600 予以刪除，

且 141 重複，只取一次

∴這 10 位同學的編號分別是：

141、012、432、536、049、127、412、482、091、076。

### 教學眉批

- 此處使用亂數表只是找出人而已，莫做過多的著墨，如：抽出 10 個人後，問這 10 個人成績的平均或這 10 個人成績超過 60 分的機率是多少等問題。

### 隨堂練習

三年 1 班共 40 位學生，從 01 號編到 40 號，導師想抽出 5 位同學打掃公共區域，若利用第 136 頁的亂數表，自第四行第二列開始，由左向右，每 2 位一數抽出 5 位同學，則這 5 位同學的編號分別是多少？

自第四行第二列開始，由左向右每 2 位一數，可得：

78、52、19、35、95、42、39、35、78、42、

06、74、80、85、50、59、32、……

∴這 5 位同學的編號分別是 19、35、39、06、32。

### 基本問題

- 忠孝國中三年級學生共有 400 位同學（編號 001~004），畢業典禮完後，校長利用課本第 128 頁的亂數表，自第五行第四列開始，由左向右，抽出 5 位學生加贈特別獎，則這 5 位學生的編號分別是幾號？051、383、218、162、040 號

### 配套指示器

- 類題熟練本 P51
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 26 回

 補充資料

### 降雨機率60% 是代表什麼意思

降雨機率係指氣象預報人員根據各種氣象資料，經過整理、分析、研判等步驟後，預測某一地區在某時段內之降雨（出現0.1毫米或以上的降雨）機會的百分數。若預報降雨機率為A%，是指過去同樣的氣象狀況中（例：雲量、溼度、天氣系統的移動速度、地形……等），每一百天，有A天會下雨。

這是一種機率預報，只是預測降雨的「機會」有多少，與下雨時間長短、面積大小及雨量大小並無直接關連。

例如：氣象局預報臺北市的降雨機率是60%，就是指有6成的機會在臺北市的任何一個地方出現降雨。

※ 資料來源：  
「中央氣象局全球資訊網」

<http://www.cwb.gov.tw/V5/top/FAQ/QA.htm>

 重點回顧

#### 1. 機率：

如果一個試驗所有可能的結果有  $n$  種，而且每一種結果發生的機會都相等，我們就說每一種結果發生的機率都是  $\frac{1}{n}$ 。

#### 2. 事件：

在隨機試驗中，任何想要觀察的情況都可以稱為事件。

#### 3. 某事件發生的機率：

如果一個試驗所有可能的結果有  $n$  種，且這  $n$  種結果發生的機會都相等，若  $A$  事件包含了其中  $m$  種 ( $m \leq n$ ) 可能的結果，我們就說  $A$  事件發生的機率是  $\frac{m}{n}$ 。

$$(1) A \text{ 事件發生的機率} = \frac{A \text{ 事件所含可能結果的個數}}{\text{隨機試驗所有可能結果的個數}}$$

(2) 任何事件發生的機率都是一個從 0 到 1 的數值。

(3) 若事件的機率是 1，表示此事件一定會發生。

(4) 若事件的機率是 0，表示此事件肯定不會發生。


#### 4. 普查與抽樣調查：

(1) 針對所需要研究的對象做全面性的調查稱為普查。

(2) 當研究對象的個數非常龐大，不適合做普查，而只抽取一小部分進行調查，稱為抽樣調查。

#### 5. 母群體與樣本：

全體被調查的對象，在統計學上稱為母群體，被抽取的對象稱為樣本。

 配套指示器

- 無敵大補帖基礎篇  
P27~31

 延伸問題

- 假設有一種特製的骰子，其六個面上的點數各為 2、3、4、5、6、7。現在同時投擲兩顆公正的這種骰子，則其點數和為幾點時機率最大？9 點

## 2-4 自我評量

1. 一個袋子中有 21 個大小相同的球，分別是 5 個紅球、7 個白球、9 個藍球，每個球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，回答下列問題：

(1) 此球是白球的機率是多少？

(2) 此球不是白球的機率是多少？

(1)  $\because$  白球有 7 個，

$$\therefore \text{取出白球的機率} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}。$$

(2) 紅球與藍球共  $5+9=14$  (個)，

$$\therefore \text{取出不是白球的機率} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}。$$

2. 一個袋子有 20 個相同大小的球，編號 1、2、3、4、5、……、19、20，每一球被取出的機會都相等，從袋中任意取出一球，則此球的號碼是 3 的倍數的機率是多少？

3 的倍數有 3、6、9、12、15、18，共 6 個，

$$\therefore \text{機率} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}。$$

### 基測試題

- 93 基測 I 第 14 題
- 94 基測 I 第 23 題
- 98 基測 II 第 26 題
- 99 基測 I 第 19 題
- 99 基測 II 第 20 題

### 趣味數學

- 有一棟 20 層大樓，小金從 1 樓乘坐電梯上樓時，在電梯的鏡子中看到的樓層數字，有幾個跟正面看到的會完全相同？

1、8、11 樓。

### 挑戰問題

1. 用 0、1、2、3 排成一個四位數，回答下列問題：

(1) 若數字可重複，可排成幾個四位數？**192 個**

(2) 若數字不可重複，可排成幾個四位數？**18 個**

2. 某甲有 3 件襯衫、4 件長褲及 2 條領帶。今甲穿襯衫、長褲，並打上領帶，有幾種不同的穿著方式？**24 種**

### 配套指示器

- 類題熟練本 P52、53
- 考前衝刺 P14、15
- 考前 100 分 P14、15
- 歷屆基測試題 2-4



- 圍棋比賽採單淘汰制，如果參賽者有 16 人，直到冠軍產生，須要比賽多少場？

15 場，因為必須淘汰 15 人。

3. 假設男孩與女孩出生的機會均等，在一個有 2 名小孩的家庭中，2 名都是女孩的機率是多少？

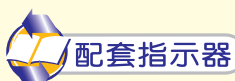
2 名小孩可能是 (男, 男)、(男, 女)、(女, 男)、(女, 女)，共 4 種，其中 (女, 女) 只有 1 種，

$$\therefore \text{機率} = \frac{1}{4}。$$

4. 同時投擲兩粒公正的骰子，則點數和小於 5 的機率是多少？

點數和小於 5 有 (1, 1)、(1, 2)、(1, 3)、(2, 1)、(2, 2)、(3, 1)，共 6 種，

$$\therefore \text{機率} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}。$$



- 類題熟練本 P52、53



1. 同時擲出一枚公正的硬幣和一個公正的骰子，求：
  - (1) 出現硬幣為正面，且骰子點數為 6 點的機率。 $\frac{1}{12}$
  - (2) 出現硬幣為反面，且骰子點數為奇數的機率。 $\frac{1}{4}$
2. 同時擲出兩枚公正的硬幣，求：
  - (1) 出現硬幣為一正面一反面的機率。 $\frac{1}{2}$
  - (2) 出現硬幣兩個都是反面的機率。 $\frac{1}{4}$

5. 一袋中裝有綠豆若干顆，將 30 顆紅豆放入同一袋中充分攪拌，任意抓取一些，共抓取 48 顆綠豆與 12 顆紅豆，試問袋中綠豆原來大約有幾顆？

設袋中綠豆原來大約有  $x$  顆，

$$x : 30 = 48 : 12$$

$$x = 120$$

∴ 袋中綠豆原來大約有 120 顆。

6. 大誠電子共有員工 450 名，分別編號從 001 到 450，年終歲末舉行贈送獎品的活動，想利用編號抽出 10 位員工分別贈送 1 臺電視機，若利用第 144 頁的亂數表，自第三行第四列開始，由左向右，抽出 10 位員工，則這 10 位員工的編號分別是多少？（已選出的號碼不再重複選取）

自第三行第四列開始由左向右，每 3 位一數，可得：

960、513、836、326、562、185、397、611、624、267、857、549、290、409、312、041、520、278、866、474、460、874、470、831、378、……

故這 10 位員工的編號分別為：

326、185、397、267、290、409、312、041、278、378。

### 教學眉批

- 如果選取的號碼重複，則需要再選取另 1 人。

### 延伸問題

- 同時擲出三枚公正的硬幣，求：
  - (1) 出現硬幣為二正面一反面的機率。 $\frac{3}{8}$
  - (2) 出現硬幣三個都是反面的機率。 $\frac{1}{8}$
- 投擲兩粒公正的骰子，求：
  - (1) 兩粒點數均相異的機率。 $\frac{5}{6}$
  - (2) 兩粒點數相同的機率。 $\frac{1}{6}$

### 配套指示器

- 類題熟練本 P52、53
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 27~30 回
- 十分鐘輕鬆考進階篇第 9~12 回
- 無敵大補帖進階篇 P15~19



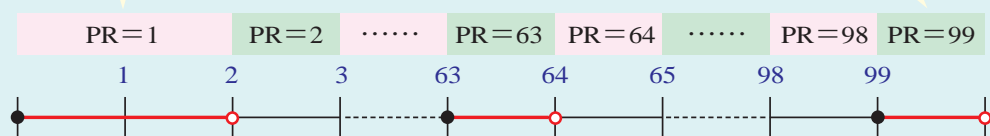
### 數學萬花筒

#### 百分等級

在一個參加人數眾多的測驗中，用 99 個百分位數可以將所有測驗者的資料平均分成 100 個小群體，每個小群體稱為 1 個等級，共可分為 100 個等級，稱為**百分等級**，並以 **PR 值** 表示。

習慣上我們不使用 PR=0 的表示法，而是將最低的 2 個小群體合併為 PR=1。

最高的 1 個等級是 PR=99，表示這個小群體裡的成績大於或等於全體考生的 99%。



PR=63 表示該群體裡的成績都大於或等於全體考生的 63%，但不到全體考生的 64%。

圖 2-24

例如：第一次模擬考有 6400 人參加，彥昌 的排名是第 2304 名，表示他贏過  $6400 - 2304 = 4096$  (人)， $\frac{4096}{6400} \times 100\% = 64\%$ ，所以彥昌 的百分等級 (PR 值) 是 64。



#### 挑戰問題

■ 1 到 100 的自然數中，任取一數，則：

(1) 此數是立方數的機率為  $\frac{1}{25}$ 。

(2) 此數是質數的機率為  $\frac{1}{4}$ 。

(3) 此數是平方數且是奇數的機率為  $\frac{1}{20}$ 。



下表是民國 98 年第一次國中基本學力測驗的全國考生百分等級和量尺總分對照表：

表 2-13 民國 98 年第一次國中基本學力測驗的全國考生百分等級和量尺總分對照表

百分等級 (PR 值)	量尺總分 (分)	累積人數 (人)	百分等級 (PR 值)	量尺總分 (分)	累積人數 (人)
99	402	3242	89	376	35295
98	398	6594	88	374	38040
97	395	9843	87	371	42305
96	392	13497	86	369	45183
95	390	16088	85	367	47990
94	387	20121	84	365	50735
93	385	22854	83	362	54830
92	383	25569	82	360	57539
91	380	29786	81	358	60260
90	378	32547	⋮	⋮	⋮

民國 98 年第一次國中基本學力測驗的全國考生有 315408 人，若將總人數均分為 100 等分，則每一個 PR 值所占的人數約為 3150 人左右，由上表可知受到同分的影響，故每一個等級的人數可能會有些許差異。明華的量尺總分是 380 分，從上表知道他的 PR 值是 91。奕萱的 PR 值是 88，從上表知道她的量尺總分在 374~376 分（含 374 分但不含 376 分），且累積人數在 PR=88 為 38040 人， $315408 - 38040 = 277368$ （人），所以奕萱至少贏過 277368（人）。

### 基本問題

- 泉嘉超商周年慶，在一個不透明的箱子內放入 96 張折價券，其種類和張數如右表所示。若每次抽完後皆會放回，且每張折價券被抽中的機會相等，則抽中 15 元折價券的機率為何？

$\frac{1}{12}$

折價券種類	張數
1元折價券	48
5元折價券	24
10元折價券	12
15元折價券	8
20元折價券	4

## 附錄：亂數表

1846	1703	9350	1460	2465	3442	5333	2727	7550	5185
3197	8521	9359	5423	9357	8420	6748	0855	0593	2745
8114	1012	7434	3253	6049	1274	1262	2482	0911	4107
6196	0513	8363	2656	2185	3976	1162	4267	8575	4929
0409	3120	4152	0278	8664	7446	0874	4708	3137	8875
6557	9823	6409	8454	8002	7884	5524	6923	1367	1769
9598	3662	1430	1038	0969	4152	2551	3655	6465	8846
2726	9960	5904	6314	5355	5939	3533	0820	0443	9500
4479	1694	6459	5609	9346	3967	8191	5523	3166	3660
5980	3973	4816	6033	3889	5984	8041	6336	3663	7798
9875	9078	3677	4599	4560	5312	4007	1019	2995	7163
3414	1527	4546	5786	9260	5559	5065	9596	9527	6593
7956	2173	5799	5857	8454	8506	5172	3532	0325	7845
9362	0122	6163	4431	0909	5839	9577	1564	3592	8065
8897	7091	1065	6914	5095	3739	8917	5662	3059	5390
7102	7241	6347	1684	2037	4447	1545	5246	4420	2841
2530	6896	0005	8084	7587	8933	5700	9396	1755	0248
9810	5666	9770	6583	1349	1955	4680	0178	4299	5543
6441	9985	7487	0031	5095	5824	4609	2781	6267	9328
1584	2151	8011	7911	7148	9381	5935	4852	5909	0798
7727	2428	1017	2828	2617	1866	1426	2250	6959	5254
3919	1254	9361	6913	9017	6137	6239	3585	9068	3496
8163	5905	2487	3664	7124	2712	7931	8193	0675	8214
9727	6682	2459	8133	9389	9818	0805	4983	7918	3714
1454	4022	7575	4999	4364	1432	9193	5166	0591	7616
6880	8013	2252	2181	2290	7424	2736	8086	1688	9561
4070	5405	0101	7790	0445	2511	3623	3316	6860	7799
0512	3138	4080	0061	5061	8011	9331	7390	9530	6644
2548	1611	8573	1338	1881	0116	4108	1028	5968	2963
6496	3511	8522	1048	1613	2246	5341	3155	4108	4215