2-2 根式的運算

1 根式的乘法

對應能力指標 8-n-03、8-n-04

含有根號的式子就叫做**根式**。例如：$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}+\sqrt{2}$、$\sqrt{2}-1$、$2\sqrt{5}$ 等都叫做根式。在這一節中，我們將學習如何進行根式的運算。

以前我們學過有理數的運算具有交換律與結合律。那麼，像 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、……，這些無理數的運算，是否也具有同樣的運算規則呢？

若一個長方形的長是 $\sqrt{3}$，寬是 $\sqrt{2}$，如圖 2-6，則此長方形的面積可記錄為 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$，也可以記錄為 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$，所以 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$。

也就是說，

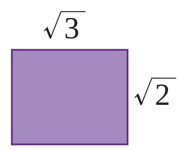


圖 2-6

根式的運算合乎乘法交換律：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}$，其中 a、$b\geqq 0$。

如圖 2-7，長方體的長、寬、高分別為 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$，

長方體的體積＝長×寬×高＝$\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}$

長方體的體積＝底面積×高＝$(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times\sqrt{5}$

若將此長方體橫放，

長方體的體積＝高×底面積＝$\sqrt{2}\times(\sqrt{3}\times\sqrt{5})$

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}=(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times\sqrt{5}=\sqrt{2}\times(\sqrt{3}\times\sqrt{5})$

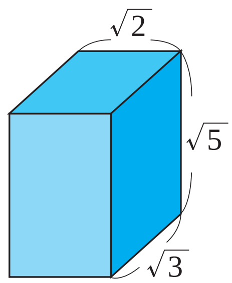


圖 2-7

綜合上述可知，

根式的運算合乎乘法結合律：

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})\cdot\sqrt{c}=\sqrt{a}\cdot(\sqrt{b}\cdot\sqrt{c})$

其中 a、b、$c\geqq 0$。

教學時數

- 8 小時

活動 1 透過圖示認識根式的乘法交換律與乘法結合律。

教學眉批

- 此部分的目的在說明：根式的運算規則也符合以前所學數的運算規則。
- 利用面積說明根式的運算合乎乘法交換律。
- 利用體積說明根式的運算合乎乘法結合律。

配套指示器

- MPB 方根 P6～10

活動 2 進行簡單根式的乘法。

教學眉批

- 先導出「兩正整數平方根的乘積等於兩正整數相乘」，然後再加上根號，進而推廣到正數。
- David Tall提出 Process Concept 的概念，茲說明如下：
  $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ 表示：
  (1)取 3 的正平方根；
  (2)取 2 的正平方根；
  (3)將兩數乘起來。
  並用$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$表示此運算得到的值。
  $\sqrt{6}$ 表示：
  取 6 的正平方根。
  $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$ 表示：兩個不同的步驟可以得到相同的值。
- 在例題 1 第(1)題中，$\sqrt{36}=6$ 的教學活動已在上一節學過，所以可以要求學生寫成整數。

在前一節我們學過：

$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2=2$

$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2=3$

$\sqrt{6}\times\sqrt{6}=(\sqrt{6})^2=6$

其中，$\sqrt{2}$ 是 2 的正平方根，$\sqrt{3}$ 是 3 的正平方根，$\sqrt{6}$ 是 6 的正平方根。

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}\times\sqrt{2})^2&=(\sqrt{3}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{2})\\&=(\sqrt{3}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{2})\\&=(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{2})^2\\&=3\times2=(\sqrt{3\times2})^2\end{aligned}$$

$\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 都是正數，所以 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 也是正數。

因為$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{3\times2}$ 都是正數，所以$\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3\times2}$。

若 $a\geqq0$，$b\geqq0$，則

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2&=(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})\\&=(\sqrt{a}\cdot\sqrt{a})\cdot(\sqrt{b}\cdot\sqrt{b})\\&=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2\\&=a\cdot b=(\sqrt{a\cdot b})^2\end{aligned}$$

因為$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 及 $\sqrt{a\cdot b}$ 都是正數或零，所以$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$。

因此，我們可以說：

若 a、b 為正數或零，則 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$。

例題 1 根式的乘法運算

配合習作 P20 基礎題 1(2)

求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$　(2) $\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{5}{3}}$　(3) $\sqrt{\frac{3}{5}}\times\sqrt{\frac{25}{3}}$

解 (1) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$
$=\sqrt{3\times12}$
$=\sqrt{36}$
$=6$

(2) $\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{5}{3}}$
$=\sqrt{6\times\frac{5}{3}}$
$=\sqrt{10}$

(3) $\sqrt{\frac{3}{5}}\times\sqrt{\frac{25}{3}}$
$=\sqrt{\frac{3}{5}\times\frac{25}{3}}$
$=\sqrt{5}$

配套指示器

- 類題熟練本 P22

隨堂練習

1. 求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{14}$

$=\sqrt{5\times14}$

$=\sqrt{70}$

(2) $\sqrt{7}\times\sqrt{28}$

$=\sqrt{7\times28}$

$=\sqrt{196}$

$=14$

(3) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}\times\sqrt{\dfrac{9}{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{5}{3}\times\dfrac{9}{5}}$

$=\sqrt{3}$

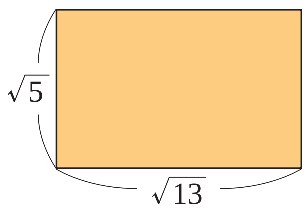
(4) $\sqrt{3}\times\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

$=\sqrt{3\times\dfrac{1}{3}}$

$=\sqrt{1}$

$=1$

2. 如右圖，已知一長方形的長是 $\sqrt{13}$ 公分，寬是 $\sqrt{5}$ 公分，求長方形的面積。



長方形面積為 $\sqrt{5}\times\sqrt{13}=\sqrt{65}$（平方公分）

以前我們學過 $a+a+a=3\cdot a=3a$；

同樣地，$\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\times\sqrt{2}$，簡記成 $3\sqrt{2}$。

透過根式的運算，我們可以得到

$$\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times5}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}=3\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$$

教學眉批

- 利用「若 a 、b 為正數或零，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$」可以大幅簡化計算過程。

補充問題

- 求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$　$\sqrt{12}$

(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{7}$　$\sqrt{21}$

(3) $\sqrt{\dfrac{1}{4}}\times\sqrt{4}$　1

(4) $\sqrt{\dfrac{1}{5}}\times\sqrt{\dfrac{5}{7}}$　$\sqrt{\dfrac{1}{7}}$

配套指示器

- 類題熟練本 P22

活動 3 理解最簡根式的意義。

教學眉批

■ 若將根號內的正整數化為標準分解式後，還有一個或一個以上的質因數次方大於 1，則此根式就不是最簡根式。例如：$\sqrt{40}=\sqrt{2^3\times5}$。

在進行根式的運算時，我們常將 $\sqrt{45}$ 整理成 $3\sqrt{5}$，像這樣將 $\sqrt{a}$ 化成 $r\sqrt{n}$ 的形式，其中 r 是一個有理數，n 是一個正整數，且 n 的因數中不含有質數的平方，這種根式就稱為**最簡根式**。

事實上，當一個根式有下列任何一種情形時，就不是最簡根式：

(1) **根號內是正整數，但此正整數的因數中含有質數的平方。**

例如：$\sqrt{12}$ 不是最簡根式。因為 12 的因數為 1、2、3、4、6、12，其中因數 4 為質數 2 的平方。

(2) **根號內有分數或小數。**

例如：$\sqrt{\frac{2}{3}}$、$\sqrt{0.7}$ 都不是最簡根式。

(3) **分母有根式。**

例如：$\frac{5}{\sqrt{2}}$ 不是最簡根式。

隨堂練習

下列根式中，哪些是最簡根式？

$\sqrt{18}$，$\sqrt{25}$，$\sqrt{15}$，$\frac{2}{3}\sqrt{6}$，$\frac{\sqrt{24}}{2}$，$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{15}$、$\frac{2}{3}\sqrt{6}$ 是最簡根式。

活動 4 運用標準分解式將根式化簡。

教學眉批

■ 若學生不熟練指數律的運用，則例題 2 第(2)題解法亦可寫成

$\sqrt{2^5\times3^2}$
$=\sqrt{2^2\times2^2\times2\times3^2}$
$=\sqrt{2^2}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}$
$=2\times2\times\sqrt{2}\times3$
$=12\sqrt{2}$

例題 2 將 $\sqrt{a^m\cdot b^n}$ 化為最簡根式

配合習作 P20 基礎題 1(1)

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{5^2\times3}$　　(2) $\sqrt{2^5\times3^2}$

解

(1) $\sqrt{5^2\times3}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{3}$
$=5\times\sqrt{3}$
$=5\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2^5\times3^2}=\sqrt{2^4\times3^2\times2}$
$=\sqrt{(2^2\times3)^2\times2}$
$=2^2\times3\times\sqrt{2}$
$=12\sqrt{2}$

配套指示器

■ 類題熟練本 P22

隨堂練習

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{2^4\times3^3}$

$=\sqrt{2^4\times3^2\times3}$

$=\sqrt{(2^2\times3)^2\times3}$

$=2^2\times3\times\sqrt{3}$

$=12\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2^5\times5^3}$

$=\sqrt{2^4\times5^2\times2\times5}$

$=\sqrt{(2^2\times5)^2\times2\times5}$

$=2^2\times5\times\sqrt{2\times5}$

$=20\sqrt{10}$

例題 3 利用標準分解式將 $\sqrt{a}$ 化為最簡根式

配合習作 P20 基礎題 1(3)

將 $\sqrt{108}$ 化為最簡根式。

解 $\sqrt{108}=\sqrt{2^2\times3^3}=\sqrt{2^2\times3^2\times3}$

$=\sqrt{(2\times3)^2\times3}=2\times3\times\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}$

隨堂練習

將下列各式化為最簡根式：

(1) $2\sqrt{27}$

$=2\times\sqrt{3^3}$

$=2\times\sqrt{3^2\times3}$

$=2\times3\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{50}$

$=\sqrt{2\times5^2}$

$=5\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{80}$

$=\sqrt{2^4\times5}$

$=\sqrt{(2^2)^2\times5}$

$=2^2\times\sqrt{5}$

$=4\sqrt{5}$

(4) $3\sqrt{12}$

$=3\times\sqrt{2^2\times3}$

$=3\times2\times\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}$

將根式化簡為最簡根式，可以讓形式不同但數值相等的許多根式，有一個共同的表示法。例如：$\sqrt{108}$、$2\sqrt{27}$、$3\sqrt{12}$ 都可表示為 $6\sqrt{3}$。

教學眉批

■ 若學生對數字的組成較為敏銳，則例題 3 的解法亦可寫成

$\sqrt{108}=\sqrt{4\times27}$

$=\sqrt{4}\times\sqrt{27}$

$=2\times\sqrt{27}$

$=2\times\sqrt{9}\times\sqrt{3}$

$=2\times3\times\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}$

或寫成

$\sqrt{108}=\sqrt{36\times3}$

$=6\sqrt{3}$

補充問題

■ 將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{3^2\times5^3}=$ $15\sqrt{5}$ 。

(2) $\sqrt{2^3\times3^2\times5}=$ $6\sqrt{10}$ 。

(3) $\sqrt{2^4\times3^3\times5^2}=$ $60\sqrt{3}$ 。

(4) $\sqrt{2^2\times5\times7^3}=$ $14\sqrt{35}$ 。

(5) $\sqrt{75}=$ $5\sqrt{3}$ 。

(6) $\sqrt{125}=$ $5\sqrt{5}$ 。

(7) $5\sqrt{24}=$ $10\sqrt{6}$ 。

(8) $3\sqrt{72}=$ $18\sqrt{2}$ 。

配套指示器

■ 類題熟練本 P22、23

活動 5 進行簡單根式的除法與形如 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 的化簡。

教學眉批

- 當 $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2=\frac{a}{b}$，且 $(\sqrt{\frac{a}{b}})^2=\frac{a}{b}$，則利用「一個正數僅有一個正平方根」的概念，可推導 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$。

2 根式的除法

對應能力指標 8-n-04、8-a-02

如圖 2-8，已知長方形的寬是 $\sqrt{3}$ 公分，面積是 $\sqrt{11}$ 平方公分，那麼長方形的長為

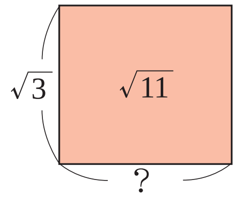


圖 2-8

$\sqrt{11}\div\sqrt{3}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$（公分）。

$$(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}})^2=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{11}\times\sqrt{11}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{11}{3}$$

因為 $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$ 是正數，所以 $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{11}{3}}$。

若 $a\geqq 0$，$b>0$，則 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$。

$$(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2=(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})\cdot(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})$$
$$=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}$$
$$=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$$

因為 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 是正數或零，所以 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$。

因此，我們可以說：

> 若 $a\geqq 0$，$b>0$，則 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a\div b}$

由最簡根式的定義，$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 不是最簡根式。如果要將 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 化成最簡根式，必須把分母的根號消去，使分母變成一個整數，這樣的過程稱為**有理化分母**。

此時可以利用 $(\sqrt{5})^2=5$ 的概念，將 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 的分子和分母同乘以 $\sqrt{5}$，

即 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

配套指示器

- 類題熟練本 P23

例題 4 有理化分母

配合習作 P20 基礎題 1(4)(5)

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$　(2) $\sqrt{\dfrac{7}{18}}$　(3) $\sqrt{0.7}$

解 (1) $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}=\dfrac{4\times\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$ ← 分子、分母同乘以 $\sqrt{5}$

$=\dfrac{4\times\sqrt{5}}{3\times5}=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$（或 $\dfrac{4}{15}\sqrt{5}$）

(2) $\sqrt{\dfrac{7}{18}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{18}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{3\times2}=\dfrac{\sqrt{14}}{6}$（或 $\dfrac{1}{6}\sqrt{14}$）

(3) $\sqrt{0.7}=\sqrt{\dfrac{7}{10}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{70}}{10}$（或 $\dfrac{1}{10}\sqrt{70}$）

隨堂練習

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{\dfrac{7}{12}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$

(2) $\sqrt{1.3}$

$=\sqrt{\dfrac{13}{10}}$

$=\dfrac{\sqrt{13}\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$

$=\dfrac{\sqrt{130}}{10}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{10}$

計算 $\sqrt{21}\div\sqrt{7}$ 時，可以先將 $\sqrt{21}\div\sqrt{7}$ 改成 $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$，再化為最簡根式，也就是 $\sqrt{21}\div\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{147}}{7}=\dfrac{7\sqrt{3}}{7}=\sqrt{3}$。

我們也學過，若 $a\geqq0$，$b>0$，則 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$。

所以，$\sqrt{21}\div\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{21}{7}}=\sqrt{3}$。

教學眉批

■ 例題 4 第(2)題，教師可讓學生比較 $\sqrt{\dfrac{7}{18}}$ 分子、分母同乘以 $\sqrt{2}$ 與同乘以 $\sqrt{18}$ 的差別。

補充問題

■ 將下列各式化爲最簡根式：

(1) $\sqrt{\dfrac{75}{4}}=$ $\underline{\dfrac{5\sqrt{3}}{2}}$。　(2) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{15}}{3}}$。　(3) $\sqrt{\dfrac{75}{3}}=$ $\underline{5}$。

(4) $\sqrt{\dfrac{1}{12}}=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$。　(5) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{15}}{5}}$。　(6) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{9}}$。

配套指示器

■ 類題熟練本 P23、24

教學眉批

- 例題 5 的題型如下：
  第(1)題：$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{a\div b}$，其計算結果不用有理化分母。
  第(2)題：$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{a\div b}$（或 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$），其計算結果須要有理化分母。

例題 5 根式的除法運算

配合習作 P20 基礎題 1(6)

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $\sqrt{52}\div\sqrt{13}$　　(2) $\sqrt{6}\div\sqrt{12}$

解 (1) $\sqrt{52}\div\sqrt{13}=\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}=\sqrt{\dfrac{52}{13}}=\sqrt{4}=2$

(2) $\sqrt{6}\div\sqrt{12}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\dfrac{6}{12}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（或 $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$）

例題 6 根式的除法運算

配合習作 P21 基礎題 2(1)

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}\div\sqrt{\dfrac{6}{5}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\div\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

解 (1) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}\div\sqrt{\dfrac{6}{5}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}\div\dfrac{6}{5}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{6}}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（或 $\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$）

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\div\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\times\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

$=\sqrt{\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{6}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$（或 $\dfrac{1}{3}\sqrt{5}$）

隨堂練習

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\div\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{3}{5}\div\dfrac{5}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{5}$

(2) $\sqrt{\dfrac{5}{4}}\div\sqrt{\dfrac{8}{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{5}{4}\div\dfrac{8}{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{5}{4}\times\dfrac{5}{8}}$

$=\dfrac{5}{4\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

配套指示器

- 類題熟練本 P24

補充問題

- 計算下列各式，並將結果化爲最簡根式：

(1) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\div\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$。　$\dfrac{4\sqrt{15}}{15}$

(2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\div\sqrt{\dfrac{5}{7}}$。　$\dfrac{\sqrt{210}}{15}$

(3) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}\div\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}$。　$\dfrac{4\sqrt{6}}{15}$

在 2-1 學到如何利用課本附錄的乘方開方表，迅速求出 $\sqrt{a}$ 的近似值，但有些根式無法由表中直接查出，此時可以將其化簡後再查表。

例題 7 根式查表的應用

利用右表查出下列各數的近似值：

(1) $\sqrt{1800}$

(2) $\sqrt{2.3}$

(3) $\sqrt{261}$

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
18	324	4.243	13.416
23	529	4.796	15.166
29	841	5.385	17.029

解 (1) $\sqrt{1800}=10\sqrt{18}\fallingdotseq 10\times 4.243=42.43$

(2) $\sqrt{2.3}=\sqrt{\dfrac{23}{10}}=\dfrac{\sqrt{230}}{10}\fallingdotseq\dfrac{15.166}{10}=1.5166$

(3) $\sqrt{261}=3\sqrt{29}\fallingdotseq 3\times 5.385=16.155$

隨堂練習

由課本附錄的乘方開方表查出下列各數的近似值：

（以四捨五入法取到小數第三位）

(1) $\sqrt{0.83}\fallingdotseq$ 0.911 。

$\sqrt{0.83}=\sqrt{83\times 0.01}=0.1\times\sqrt{83}\fallingdotseq 0.911$

(2) $\sqrt{80000}\fallingdotseq$ 282.843 。

$\sqrt{80000}=\sqrt{8\times 10000}=100\times\sqrt{8}\fallingdotseq 282.843$

(3) $\sqrt{3.51}\fallingdotseq$ 1.873 。

$\sqrt{3.51}=\sqrt{351\times 0.01}=0.1\times\sqrt{3^2\times 39}=0.3\times\sqrt{39}\fallingdotseq 1.873$

教學眉批

■ 例題 7 是 2-1查表法的進階練習。先將根式化簡後，再進行查表。

補充問題

■ 利用課本附錄的乘方開方表，查出下列各數的近似值：（四捨五入到小數第三位）

(1) $\sqrt{0.79}\fallingdotseq$ 0.889 。　(2) $\sqrt{2.16}\fallingdotseq$ 1.470 。

(3) $\sqrt{3400}\fallingdotseq$ 58.310 。　(4) $\sqrt{870}\fallingdotseq$ 29.496 。

配套指示器

■ 類題熟練本 P24

■ 十分鐘輕鬆考基礎篇第 17 回

活動6 透過圖示認識根式的加法交換律、加法結合律與分配律。

教學眉批

- 利用線段長度說明根式的運算合乎「加法交換律」。
- 利用線段長度說明根式的運算合乎「加法結合律」。
- 教師可利用兩塊長方形面積的拼合，說明根式的運算合乎「乘法對加法的分配律」。

3 根式的加減

對應能力指標 8-n-03、8-n-04

我們知道根式的運算合乎乘法交換律與乘法結合律，事實上，它們也合乎其他的運算規則。

如圖 2-9，$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$。同樣地，$\overline{AC}=\overline{CB}+\overline{BA}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$。因為 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 都表示 $\overline{AC}$ 的長度，所以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$。

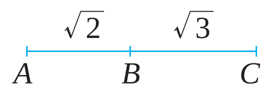


圖 2-9

如圖 2-10，$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

又 $\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}$

又 $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\sqrt{2}+(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

所以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}$

$=\sqrt{2}+(\sqrt{3}+\sqrt{5})$。

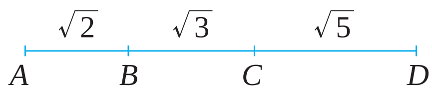


圖 2-10

根式的運算合乎加法交換律與加法結合律：

1. $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{b}+\sqrt{a}$
2. $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}=\sqrt{a}+(\sqrt{b}+\sqrt{c})$，

其中 a、b、$c\geqq 0$。

如圖 2-11，長方形 $ABCD$ 是由長方形 $ABEF$ 和長方形 $FECD$ 所組成。

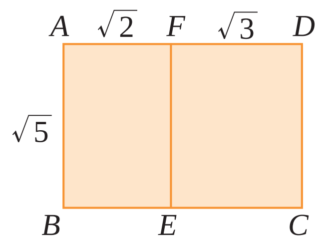


圖 2-11

長方形 $ABCD$ 的面積 $=\sqrt{5}\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

長方形 $ABEF$ 的面積 $=\sqrt{5}\times\sqrt{2}$

長方形 $FECD$ 的面積 $=\sqrt{5}\times\sqrt{3}$

由「長方形 $ABCD$ 的面積＝長方形 $ABEF$ 的面積＋長方形 $FECD$ 的面積」可知：$\sqrt{5}\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\sqrt{5}\times\sqrt{2}+\sqrt{5}\times\sqrt{3}$。也就是說，

根式的運算合乎分配律：

$\sqrt{a}\cdot(\sqrt{b}+\sqrt{c})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{c}$，其中 a、b、$c\geqq 0$

我們知道 $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$。同樣地，

$$4\sqrt{5}+3\sqrt{5}=(\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5})$$
$$=\sqrt{5}\times 7=7\sqrt{5}$$

換個方式思考，我們也可以用分配律的概念得到

$$4\sqrt{5}+3\sqrt{5}=4\times\sqrt{5}+3\times\sqrt{5}$$
$$=(4+3)\times\sqrt{5}=7\sqrt{5}$$

一般來說，針對兩個或兩個以上的方根，將方根化為最簡根式後，如果根號內的數相同，這種方根都叫做**同類方根**。例如：$5\sqrt{7}$ 和 $2\sqrt{7}$ 是同類方根，$6\sqrt{6}$、$\sqrt{6}$、$-\frac{2}{3}\sqrt{6}$ 是同類方根；而 $5\sqrt{3}$ 和 $5\sqrt{2}$ 不是同類方根。

例題 8 同類方根的合併

配合習作 P21 基礎題 2(2)(3)

計算 $7\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

解 $7\sqrt{3}-3\sqrt{3}=7\times\sqrt{3}-3\times\sqrt{3}$
$=(7-3)\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

隨堂練習

計算下列各式：

(1) $\sqrt{2}+4\sqrt{2}$
$=5\sqrt{2}$

(2) $5\sqrt{7}-\sqrt{7}$
$=4\sqrt{7}$

方根做加減運算時，可以利用分配律將同類方根合併。

例如：$4\sqrt{5}+3\sqrt{5}$ 合併成 $7\sqrt{5}$。但是像 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}$ 不是同類方根，所以 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 就是最簡形式。

動動腦

利用電算器分別計算 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{5}$，它們的近似值相等嗎？

$\sqrt{3}+\sqrt{2}=1.7320508+1.4142135=3.1462643$

$\sqrt{5}=2.2360679$，所以近似值不相等。

活動 7 計算同類方根的加減。

教學眉批

- 當學生熟練根式的化簡後，教師應鼓勵學生省略計算過程，而直接說出結果。

補充問題

- 計算下列各式：

(1) $15\sqrt{3}-30\sqrt{3}$
$-15\sqrt{3}$

(2) $6\sqrt{5}-5\sqrt{5}$
$\sqrt{5}$

(3) $-5\sqrt{2}+4\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$

(4) $\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\sqrt{5}$
$\frac{13}{6}\sqrt{5}$

配套指示器

- 類題熟練本 P24

教學眉批

- 例題 9 第(2)題，教師可先提示 $5\sqrt{12}=5\times\sqrt{12}$，再鼓勵學生自行化簡。

計算方根的加減時，通常將各項改成最簡根式後，再合併同類方根，讓我們來看看下面的例題。

例題 9 化簡後再合併同類方根

配合習作 P21 基礎題 2(4)

計算下列各式：

(1) $\sqrt{98}+\sqrt{72}$　　(2) $\sqrt{108}-5\sqrt{12}$

解 (1) $\sqrt{98}+\sqrt{72}$

$=7\sqrt{2}+6\sqrt{2}$

$=13\sqrt{2}$

$\sqrt{98}=\sqrt{2\times7^2}$
$=\sqrt{2}\times\sqrt{7^2}$
$=\sqrt{2}\times7$
$=7\sqrt{2}$

$\sqrt{72}=\sqrt{2^3\times3^2}$
$=\sqrt{(2\times3)^2\times2}$
$=2\times3\times\sqrt{2}$
$=6\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{108}-5\sqrt{12}$

$=6\sqrt{3}-10\sqrt{3}$

$=-4\sqrt{3}$

$\sqrt{108}=\sqrt{2^2\times3^3}$
$=\sqrt{(2\times3)^2\times3}$
$=2\times3\times\sqrt{3}$
$=6\sqrt{3}$

$5\sqrt{12}=5\times\sqrt{2^2\times3}$
$=5\times2\times\sqrt{3}$
$=10\sqrt{3}$

隨堂練習

計算下列各式：

(1) $3\sqrt{8}+\sqrt{18}$

$=3\times2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

$=6\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

$=9\sqrt{2}$

(2) $4\sqrt{12}-2\sqrt{27}-\sqrt{3}$

$=4\times2\sqrt{3}-2\times3\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$=8\sqrt{3}-6\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}$

配套指示器

- 類題熟練本 P25
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 18 回

補充問題

- 計算下列各式：

(1) $\sqrt{12}+\sqrt{12}$
$4\sqrt{3}$

(2) $5\sqrt{8}-\sqrt{50}$
$5\sqrt{2}$

(3) $3\sqrt{18}-\sqrt{8}$
$7\sqrt{2}$

(4) $\sqrt{75}+\sqrt{3}$
$6\sqrt{3}$

4 根式的四則運算

對應能力指標 8-n-04

前面學過根式的運算也合乎分配律，我們來看看下面的例子。

例題 10 分配律

配合習作 P21、22 基礎題 2(6)、3(1)

計算下列各式：

(1) $-3(\sqrt{49}-\frac{1}{2}\sqrt{2})$　(2) $2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

(3) $5(1+\frac{2}{5}\sqrt{6})-3(\sqrt{25}-\frac{1}{3}\sqrt{6})$　(4) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

解 (1) $-3(\sqrt{49}-\frac{1}{2}\sqrt{2})$

$=(-3)\times\sqrt{49}+(-3)\times(-\frac{1}{2}\sqrt{2})$

$=(-3)\times 7+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$=-21+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

(2) $2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$=2\sqrt{3}\times\sqrt{6}-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$=2\sqrt{18}-2\sqrt{6}$

$=6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$

(3) $5(1+\frac{2}{5}\sqrt{6})-3(\sqrt{25}-\frac{1}{3}\sqrt{6})$

$=5+2\sqrt{6}-15+\sqrt{6}$

$=5-15+2\sqrt{6}+\sqrt{6}$

$=-10+3\sqrt{6}$

(4) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$=\sqrt{12}-2+\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$=2\sqrt{3}-2+\sqrt{6}-\sqrt{2}$

隨堂練習

計算下列各式：

(1) $4(\sqrt{20}-\sqrt{9})$

$=4(2\sqrt{5}-3)$

$=8\sqrt{5}-12$

(2) $\sqrt{6}(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

$=\sqrt{18}+2\sqrt{12}$

$=3\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

(3) $4(2-\frac{1}{4}\sqrt{3})-3(5-\frac{2}{3}\sqrt{3})$

$=8-\sqrt{3}-15+2\sqrt{3}$

$=-7+\sqrt{3}$

(4) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$=\sqrt{18}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

活動 8 利用根式的運算，了解根式的四則運算。

教學眉批

- 在進行負數或減法的分配律時，宜提醒學生要記得變號。

補充問題

- 計算下列各式：

(1) $-(5-2\sqrt{3})$

$-5+2\sqrt{3}$

(2) $2(\sqrt{72}-6)$

$12\sqrt{2}-12$

(3) $-4(\sqrt{75}+\sqrt{45})$

$-20\sqrt{3}-12\sqrt{5}$

(4) $\sqrt{6}(\sqrt{12}-3\sqrt{3})$

$-3\sqrt{2}$

配套指示器

- 類題熟練本 P25

教學眉批

- 例題 11 的出題動機是要讓學生熟悉「將根式化為最簡根式後，再合併同類方根」。

配合習作 P21 基礎題 2(5)

例題 11 根式的加減

計算下列各式：

(1) $3\sqrt{8}+\sqrt{27}+\sqrt{18}-\sqrt{48}$

(2) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}+4\sqrt{2}$

解 (1) $3\sqrt{8}+\sqrt{27}+\sqrt{18}-\sqrt{48}$

$=6\sqrt{2}+3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

$=6\sqrt{2}+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

$=9\sqrt{2}-\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}+4\sqrt{2}$

$=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+4\sqrt{2}$

$=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+4\sqrt{2}$

$=(\dfrac{3}{2}+4)\times\sqrt{2}$

$=\dfrac{11}{2}\sqrt{2}$

隨堂練習

計算下列各式：

(1) $5(\sqrt{98}-\sqrt{75})-2(3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

$=5(7\sqrt{2}-5\sqrt{3})-2(3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

$=35\sqrt{2}-25\sqrt{3}-6\sqrt{2}-8\sqrt{3}$

$=29\sqrt{2}-33\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}$

配套指示器

- 類題熟練本 P25

補充問題

- 計算下列各式：

(1) $\sqrt{12}-\sqrt{27}-\sqrt{32}+\sqrt{98}$

$3\sqrt{2}-\sqrt{3}$

(2) $2(\sqrt{12}-\sqrt{3})-(\sqrt{25}+\sqrt{50})$

$-5-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{72}-\sqrt{10})$

$6-\sqrt{5}$

第 1 章所學的乘法公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，當 a、b 是根式時也一樣成立。

活動 9 運用乘法公式，進行根式的運算。

例題 12 利用和的平方公式化簡根式

配合習作 P22 基礎題 3(2)

利用乘法公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 展開 $(3+\sqrt{5})^2$，並化簡其結果。

解 $(3+\sqrt{5})^2=3^2+2\times3\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2=9+6\sqrt{5}+5=14+6\sqrt{5}$

隨堂練習

配合習作 P22 基礎題 3(3)

利用乘法公式 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 展開 $(4-\sqrt{3})^2$，並化簡其結果。

$(4-\sqrt{3})^2=4^2-2\times4\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$
$=16-8\sqrt{3}+3$
$=19-8\sqrt{3}$

例題 13 利用平方差公式化簡根式

配合習作 P22 基礎題 3(4)

利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開 $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$。

解 $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=3^2-(\sqrt{5})^2=9-5=4$

隨堂練習

利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$。

$(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$
$=3-5$
$=-2$

教學眉批

- 例題 12、13 是例題 14 的前置經驗。

補充問題

- 計算下列各式：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$
$5+2\sqrt{6}$

(2) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$
$8-2\sqrt{15}$

(3) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$
1

(4) $(\sqrt{3}+\sqrt{15})(\sqrt{15}-\sqrt{3})$
12

配套指示器

- 類題熟練本 P26

活動 10 利用乘法公式的運算，了解分母的有理化。

教學眉批

■ 所謂「有理化分母」就是要證明任何 $a+b\sqrt{c}$（c 爲正整數）的倒數具有相同的形式，即 $\frac{1}{a+b\sqrt{c}}=\frac{a}{a^2-cb^2}-\frac{b}{a^2-cb^2}\sqrt{c}$。

接下來看看更複雜的有理化分母。我們知道，如果要將 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 化成最簡根式，必須把分母的根號消去。同樣地，要化簡 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$，也要將分母的根號消去，此時可利用平方差公式，將 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 的分子和分母同乘以 $\sqrt{5}-\sqrt{2}$，

即 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$

$=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3}$

$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$
$=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2$
$=5-2$
$=3$

配合習作 P22 基礎題 3(5)(6)

例題 14 利用平方差公式有理化分母

利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 化簡下列各式：

(1) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$　　(2) $\frac{3}{\sqrt{6}-2}$

解 (1) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{5}$

分子、分母同乘以 $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

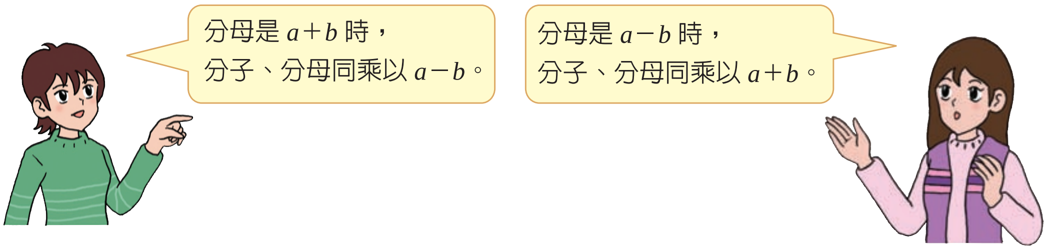
$(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})$
$=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2=6-5=1$

(2) $\frac{3}{\sqrt{6}-2}=\frac{3(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}$

$=\frac{3\sqrt{6}+6}{2}$

分子、分母同乘以 $\sqrt{6}+2$

$(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)$
$=(\sqrt{6})^2-2^2=6-4=2$



配套指示器

■ 類題熟練本 P26

補充問題

■ 化簡下列各式：

(1) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$　$\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(2) $\frac{4}{\sqrt{5}+1}$　$\sqrt{5}-1$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$　$\frac{2+\sqrt{14}}{5}$

(4) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$　$4-\sqrt{15}$

隨堂練習

化簡下列各式：

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$

(1)
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{2-\sqrt{2}}{2-1}=2-\sqrt{2}$$

(2)
$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6-2}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(3)
$$=\frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=\frac{\sqrt{3}-2}{3-4}=2-\sqrt{3}$$

重點回顧

1. 若 $a\geqq 0$，$b\geqq 0$，則 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$。

2. **最簡根式**：將 $\sqrt{a}$ 化成 $r\sqrt{n}$ 的形式，其中 r 是一個有理數，n 是一個正整數，且 n 的因數中不含有質數的平方，這種根式就稱為最簡根式。

3. 若 $a\geqq 0$，$b>0$，則 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{a\div b}$。

4. **同類方根**：$\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 化為最簡根式後，如果根號內的數相同，則 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 就稱為同類方根。

5. 根式做加減運算時，要將同類方根合併；不是同類方根，就無法合併。

6. 若 $a>0$，$b>0$，化簡分母為 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$、$\sqrt{a}\pm b$ 或 $a\pm\sqrt{b}$ 的根式時，可以利用平方差公式把分母的根號消去。

補充問題

■ 化簡下列各式：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$ $-3-2\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ $\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$

配套指示器

- 類題熟練本 P26
- 十分鐘輕鬆考基礎篇第 19 回
- 無敵大補帖基礎篇 P14～17

2-2 自我評量

1. 將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{45}$

$=\sqrt{3^2\times5}$

$=3\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{2^5\times3^3}$

$=\sqrt{2^4\times3^2\times2\times3}$

$=\sqrt{(2^2\times3)^2\times2\times3}$

$=12\sqrt{6}$

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(4) $\sqrt{\dfrac{5}{24}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{30}}{12}$

2. 計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $\sqrt{18}\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{18\times3}$

$=\sqrt{3^2\times2\times3}$

$=3\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{\dfrac{125}{4}}\times\sqrt{\dfrac{32}{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{125}{4}\times\dfrac{32}{5}}$

$=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{36}\times\sqrt{98}$

$=6\times7\sqrt{2}$

$=42\sqrt{2}$

(4) $\sqrt{(-3)^2}\times\sqrt{4}$

$=3\times2$

$=6$

(5) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}\div\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

$=\sqrt{\dfrac{4}{9}\div\dfrac{4}{3}}=\sqrt{\dfrac{4}{9}\times\dfrac{3}{4}}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(6) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\div\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

教學眉批

- 第 2(3)題，在進行數字較大的根式乘法時，可先個別化簡，再相乘。

配套指示器

- 類題熟練本 P27
- 考前衝刺 P10、11
- 考前 100 分 P10、11
- 歷屆基測試題 2-2

補充問題

- 將下列各式化爲最簡根式：

(1) $\sqrt{3528}$ = $\underline{42\sqrt{2}}$ 。

(2) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2+\sqrt{7}}$ = $\underline{-2\sqrt{5}+\sqrt{35}}$ 。

(3) $\dfrac{1}{2}\sqrt{1\dfrac{1}{2}}\div\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}\div4\sqrt{6}$ = $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{8}}$ 。

3. 已知 $\sqrt{87}\fallingdotseq 9.327$，$\sqrt{870}\fallingdotseq 29.496$，則

$\sqrt{870000}\fallingdotseq$ ___932.7___ ，$\sqrt{8.7}\fallingdotseq$ ___2.9496___

$\sqrt{870000}=100\times\sqrt{87}=932.7$

$\sqrt{8.7}=\sqrt{\dfrac{870}{100}}=\dfrac{\sqrt{870}}{10}=2.9496$

4. 化簡下列各式：

(1) $3\sqrt{6}-8\sqrt{6}$

$=-5\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{72}-\sqrt{32}$

$=6\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}+\sqrt{27}$

$=\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{75}-2\sqrt{48}$

$=5\sqrt{3}-8\sqrt{3}$

$=-3\sqrt{3}$

(5) $\sqrt{5}\,(\sqrt{15}+\sqrt{3})$

$=\sqrt{75}+\sqrt{15}$

$=5\sqrt{3}+\sqrt{15}$

(6) $3\sqrt{24}+\sqrt{96}+\sqrt{45}-\sqrt{125}$

$=6\sqrt{6}+4\sqrt{6}+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}$

$=10\sqrt{6}-2\sqrt{5}$

5. 利用乘法公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 展開 $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$，並化簡其結果。

$(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2$

$=3+6\sqrt{2}+6$

$=9+6\sqrt{2}$

教學眉批

■ 第 3 題中，學生較難直接發現 $\sqrt{8.7}$ 的求法，教師宜耐心講解。

補充問題

■ 解下列各方程式，並將其解化為最簡根式：

(1) $\sqrt{3}\,x=3$

$x=\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{5}\,x=\sqrt{8}$

$x=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

(3) $\sqrt{2}\,x+7=4$

$x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(4) $\sqrt{12}\,x-4=5$

$x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

配套指示器

■ 類題熟練本 P27

6. 利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開 $(3\sqrt{2}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})$。

$$\begin{aligned}(3\sqrt{2}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})&=(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2\\&=18-5\\&=13\end{aligned}$$

7. 利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 化簡 $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$。

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}&=\frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}\\&=\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{2-5}\\&=\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{-3}\\&=\sqrt{5}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

8. 計算下列各式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}&=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\\&=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}\\&=\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-1}$

$$\begin{aligned}&=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\&=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{6}}{2-1}\\&=2\sqrt{3}+\sqrt{6}\end{aligned}$$

配套指示器

- 類題熟練本 P27
- 十分鐘輕鬆考進階篇第 7 回
- 無敵大補帖進階篇 P11、12

補充問題

- 解下列各方程式，並將其解化爲最簡根式：

(1) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})x=\sqrt{2}$

$x=\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}$

(2) $\sqrt{2}x-3=x-1$

$x=2\sqrt{2}+2$

(3) $\sqrt{5}x+\sqrt{2}=\sqrt{2}x+\sqrt{5}$

$x=1$

(4) $\sqrt{2}x+\sqrt{3}x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$x=5-2\sqrt{6}$