
 教學時數


■ 4小時

活動 1 能了解公因數的意義，並求出兩數的最大公因數。

活動 2 能了解互質的意義。

 教學眉批

- 以表列法求兩數的最大公因數。
- 兩數若除了 1 之外，沒有其他的公因數，則我們稱兩數互質。
- 互質的兩數不一定是質數；兩相異質數一定互質。
- 兩數最大公因數的因數，也是原兩數的公因數。
- 連續兩個整數必互質，例如：
16、17 互質，
48、49 互質。
- 若 a 、 b 是自然數，且 a 是 b 的因數，則 $(a, b) = a$ ，
例如：
 $(6, 36) = 6$ 。

 配套指示器

- MPB 質因數分解 P6~20
- 類題熟練本 P42

2-2 最大公因數與最小公倍數

國小時，我們學過以短除法求兩數的最大公因數與最小公倍數，在本節中將介紹另一種方法。

1 最大公因數

對應能力指標 7-n-10

某幾個整數共同的因數稱為這幾個整數的**公因數**，在這些公因數中，最大的一個稱為**最大公因數**。

例如：12 的因數有 1、2、3、4、6、12，

18 的因數有 1、2、3、6、9、18，

其中 1、2、3、6 是 12 和 18 的公因數，而 6 就是 12 和 18 的最大公因數。通常我們用 $(12, 18)$ 來表示 12 和 18 的最大公因數，即 $(12, 18) = 6$ 。

最大公因數 6 的因數 1、2、3、6 都是 12 和 18 的公因數，

所以 12 和 18 的公因數都是最大公因數 6 的因數。

而 15 的因數有 1、3、5、15，

28 的因數有 1、2、4、7、14、28，

15 和 28 除了 1 之外沒有其他的公因數，它們的最大公因數為 1，

即 $(15, 28) = 1$ ，我們就說 15 和 28 兩數**互質**。

任意兩正整數 a 、 b ，若 $(a, b) = 1$ ，則稱 a 與 b 互質。

例題 1 求兩數的最大公因數

搭配習作 P30 基礎題 2

求 90 和 72 的最大公因數。

解 我們將 90、72 的所有因數分別列出：

90 的因數有 1、2、3、5、6、9、10、15、18、30、45、90，

72 的因數有 1、2、3、4、6、8、9、12、18、24、36、72，

所以 90 和 72 的最大公因數 $(90, 72) = 18$ 。

補充問題

- (A) 下列敘述何者正確？
 - (A) 兩相異質數一定互質
 - (B) 連續兩整數不一定互質
 - (C) 兩數互質，則其中至少有一數是質數
 - (D) 91 與 119 互質。

我們也可先將 90、72 作質因數分解：

$$90 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{3} \times 5$$

$$72 = \boxed{2} \times 2 \times 2 \times \boxed{3} \times \boxed{3}$$

觀察上兩式，我們可發現 $2 \times 3 \times 3$ 是 90 和 72 的最大公因數。

用短除法求兩個數的最大公因數時，通常由最小的質因數開始。例如先看兩數是否含有公因數 2，直到兩數已不含公因數 2 時，再看是否含有公因數 3、公因數 5、公因數 7、……，直到最後剩下的兩數互質為止。

例如：90 與 72 的最大公因數可寫成：

2	90 72	← 90、72 有公因數 2
3	45 36	← 45、36 有公因數 3
3	15 12	← 15、12 有公因數 3
	5 4	← 5、4 兩數互質

所以 90 和 72 的最大公因數 $(90, 72) = 2 \times 3 \times 3 = 18$

教學眉批

- 短除法可以視為質因數分解法的併式紀錄。
- 短除法的規則雖然簡單，但教學時應讓學生知道，每一步驟都含有因數判別與試除的精神。

例題 2 求兩數的最大公因數

搭配習作 P30 基礎題 2

求 1848 和 1386 的最大公因數。

解

2	1848 1386
3	924 693
7	308 231
11	44 33
	4 3

所以 1848 和 1386 的最大公因數

$$(1848, 1386) = 2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462$$

最大公因數 $2 \times 3 \times 7 \times 11$
也可以不用乘開。

補充問題

1. (B) a 是一個正整數，其所有正因數有：1、2、3、26、39、78。則 a 與 910 的最大公因數為何？
(A) 13 (B) 26 (C) 39 (D) 78
2. (B) 小美將 a 、 b 兩個正整數作質因數分解，完整的作法如右。已知 $f > g > 1$ ， e 是質數，且 a 、 b 的最大公因數是 10，最小公倍數是 210，則下列哪一個關係是錯誤的？
(A) $d > e$ (B) $e > f$ (C) $e > g$ (D) $d > f$

$$e \left| \begin{array}{cc} a & b \\ \hline c & d \\ \hline f & g \end{array} \right.$$

配套指示器

- 類題熟練本 P42

 隨堂練習

求下列各式的值：

(1) $(2652, 792)$

12

(2) $(171, 28)$

1

搭配習作 P30 基礎題 2(6)
P32 基礎題 6(1)

 例題 3 利用標準分解式求最大公因數

求 $2^3 \times 3 \times 7^2$ 和 $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11^2$ 的最大公因數。

$$\begin{aligned} \text{解 } 2^3 \times 3 \times 7^2 &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \times \boxed{3} \times \boxed{7} \times \boxed{7} \\ 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11^2 &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times 3 \times 3 \times 5 \times \boxed{7} \times 11 \times 11 \end{aligned}$$

所以 $(2^3 \times 3 \times 7^2, 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11^2)$

$$= 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

$$= 2^2 \times 3 \times 7$$

$$= 84$$

我們可以這樣看：

$2^3 \times 3$	$\times 7^2$	① 找共同質因數
$2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$	$\times 11^2$	
↓	↓	↓
2^2	3	7
$2^2 \times 3$	$\times 7$	② 取指數最小者
		③ 相乘
最大公因數		

由例題 3 可以發現，

求 (a, b) 可先求出 a 和 b 的標準分解式，找出兩者共同的質因數，把共同質因數中指數最小者相乘，即為 a 和 b 的最大公因數。

如果找不到共同質因數，則兩者的最大公因數為 1。


 例題 4 求兩數的最大公因數

搭配習作 P30 基礎題 2(6)


求 $2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$ 和 138 的最大公因數。

$$\text{解 } 138 = 2 \times 3 \times 23$$

$$\text{所以 } (2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11, 138) = (2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11, 2 \times 3 \times 23) = 2 \times 3 = 6$$

 教具指示器

- 教學掛圖
3A-4

 配套指示器

- 類題熟練本 P42、43

 趣味數學

- 有一個正整數，每位數字皆由 0 或 1 所組成，且是 225 的倍數，求此正整數最小為多少？

1111111100

 隨堂練習

求下列各組數的最大公因數：

(1) $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ 、 $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ (2) 45 、 $2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2$

420 (或 $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$)

15

我們已學會了求兩個整數的最大公因數。那麼三個數的最大公因數又該怎麼求呢？

 例題 5 求三數的最大公因數

搭配習作 P31 基礎題3

求 72、120、84 三數的最大公因數。

 解一 先個別作質因數分解，再求最大公因數

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

所以 72、120、84 的最大公因數

$$(72, 120, 84) = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

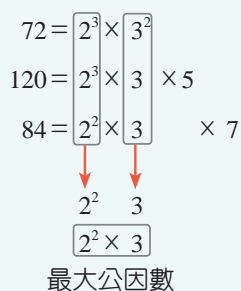
 解二 利用短除法

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \quad 120 \quad 84 \\ \hline 2 & 36 \quad 60 \quad 42 \\ \hline 3 & 18 \quad 30 \quad 21 \\ \hline & 6 \quad 10 \quad 7 \end{array}$$


所以 72、120、84 的最大公因數 $(72, 120, 84) = 2 \times 2 \times 3 = 12$

我們可以這樣看：

$$\begin{array}{l} 72 = 2^3 \times 3^2 \\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \\ 84 = 2^2 \times 3 \times 7 \end{array}$$



最大公因數

 活動 3 能求出三數的最大公因數。

 教學眉批

■ 三個數求最大公因數，在方法上可視為兩個數求最大公因數的推展，教師也可以用 $(a, b, c) = (a, (b, c))$ 說明。

 補充問題

1. 求下列各組數的最大公因數：


(1) $3^2 \times 5^3 \times 11$ 、 $2 \times 5^2 \times 11$

(2) $2^5 \times 3^2 \times 7^2 \times 13^2$ 、 $2 \times 5^2 \times 7 \times 11^2$

(1) $5^2 \times 11$ (2) 2×7

2. 甲、乙、丙三個正整數，若甲、乙兩數的最大公因數是 104，乙、丙兩數的最大公因數是 390，甲、丙兩數的最大公因數是 182，則甲、乙、丙三數的最大公因數是多少？

26

 配套指示器

■ 類題熟練本 P43

例題 6 求三數的最大公因數

搭配習作 P31 基礎題 3

求 72、108、252 三數的最大公因數。

$$\begin{array}{r}
 \text{解} \quad 2 \left| \begin{array}{ccc} 72 & 108 & 252 \\ \hline 36 & 54 & 126 \\ \hline 18 & 27 & 63 \\ \hline 6 & 9 & 21 \\ \hline 2 & 3 & 7 \end{array} \\
 2 \left| \begin{array}{ccc} 36 & 54 & 126 \\ \hline 18 & 27 & 63 \\ \hline 6 & 9 & 21 \\ \hline 2 & 3 & 7 \end{array} \\
 3 \left| \begin{array}{ccc} 18 & 27 & 63 \\ \hline 6 & 9 & 21 \\ \hline 2 & 3 & 7 \end{array} \\
 3 \left| \begin{array}{ccc} 6 & 9 & 21 \\ \hline 2 & 3 & 7 \end{array}
 \end{array}$$

所以 72、108、252 的最大公因數

$$(72, 108, 252) = 2^2 \times 3^2 = 36$$

隨堂練習

求下列各組數的最大公因數：

$$(1) 42, 56, 154$$

$$14$$

$$(2) 72, 54, 126$$

$$18$$

例題 7 求已分解三數的最大公因數

搭配習作 P32 基礎題 6(2)

求 $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 、 $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11$ 、 $2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11$ 三數的最大公因數。

$$\begin{array}{r}
 \text{解} \quad \boxed{2^3} \times \boxed{3^2} \times \boxed{5} \times 7 \\
 \boxed{2^2} \times \boxed{3} \times \boxed{5^2} \times 11 \\
 \boxed{2^2} \times \boxed{3^3} \times \boxed{5} \times 11
 \end{array}$$

所以最大公因數為 $2^2 \times 3 \times 5 = 60$ **隨堂練習**求 $2^2 \times 3 \times 7$ 、 $2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ 、 $2^3 \times 3^2 \times 5$ 三數的最大公因數。

6

**配套指示器**

類題熟練本 P43、44

**補充問題**

求下列各組數的最大公因數：

(1) 63、147、231

(2) 68、119、170

(3) $2^4 \times 3^3 \times 5^2$ 、

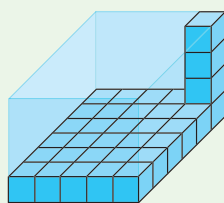
$3^2 \times 5^4 \times 7^3$ 、

$5^3 \times 7^2 \times 11^4$

(1) 21 (2) 17 (3) 5^2

例題 8 最大公因數的應用問題

顏舒基想用大小相同的正立方體積木填滿內部長 72 公分、寬 60 公分、高 48 公分的箱子，試問他所用的正立方體積木，邊長最大可能是多少公分？此時需要多少個積木才能填滿整個箱子？



解 因為要用正立方體積木填滿整個箱子，所以積木的邊長必須為 72、60 和 48 的公因數，因為正立方體積木的邊長要最大，所以邊長就是 72、60 和 48 的最大公因數。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \quad 60 \quad 48 \\ \hline 2 & 36 \quad 30 \quad 24 \\ \hline 3 & 18 \quad 15 \quad 12 \\ \hline & 6 \quad 5 \quad 4 \end{array}$$

所以 $(72, 60, 48) = 2 \times 2 \times 3 = 12$

即所用正立方體積木邊長最大為 12 公分

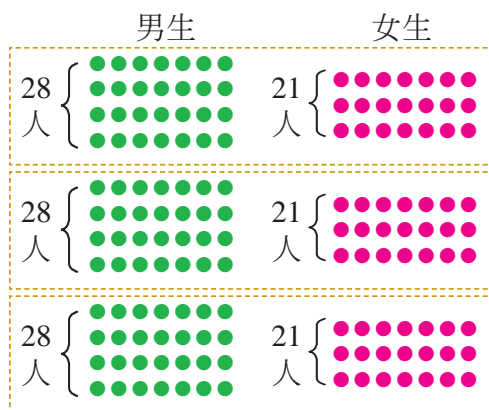
$72 \div 12 = 6$ ， $60 \div 12 = 5$ ， $48 \div 12 = 4$

共需積木 $6 \times 5 \times 4 = 120$ (個)

隨堂練習

有 84 位男童軍、63 位女童軍混合編隊，各隊的男生人數一樣多，各隊的女生人數也一樣多，例如下圖是其中一種編隊方法，共編成 3 隊。試問最多可以編成幾隊？每隊有幾位男童軍、幾位女童軍？

最多可編成 21 隊，
每隊有 4 位男童軍、3 位女童軍。



補充問題

- 將 180 支原子筆、135 支鉛筆及 105 個橡皮擦分成若干堆，使得各文具在每堆中的數量一樣多，則最多可分成多少堆？如果只分成 3 堆，則每堆有幾支筆？

15 堆，105 支筆

教具指示器

- 教學掛圖
4B-4

配套指示器

- 類題熟練本 P44

活動 4 能計算最大公因數的應用問題。

教學眉批

- 不論題目中的關鍵字是「切割」、「裁剪」，還是「堆積」、「填滿」，都應該引導學生能自行畫出草圖，然後從公因數、公倍數的基本觀念開始思考，並正確解讀題目中「最多」、「至少」等語意，以決定應該求最大公因數或最小公倍數。

教學眉批

- 種樹問題要特別留意端點的處理。

例題 9 最大公因數的應用問題

有一個四邊形的公園，四邊長分別是 140 公尺、154 公尺、168 公尺與 210 公尺，現在要在公園的四周種樹，每棵樹的距離相等，且公園的四個頂點也要種樹，試問最少要種幾棵樹？

解 因為每棵樹的距離相等，且公園的四個頂點也要種樹，故每棵樹的距離是 140 公尺、154 公尺、168 公尺與 210 公尺的公因數，又因為樹的數目要最少，所以樹距是它們的最大公因數。

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 140 & 154 & 168 & 210 \\ \hline 7 & 70 & 77 & 84 & 105 \\ \hline & 10 & 11 & 12 & 15 \end{array}$$

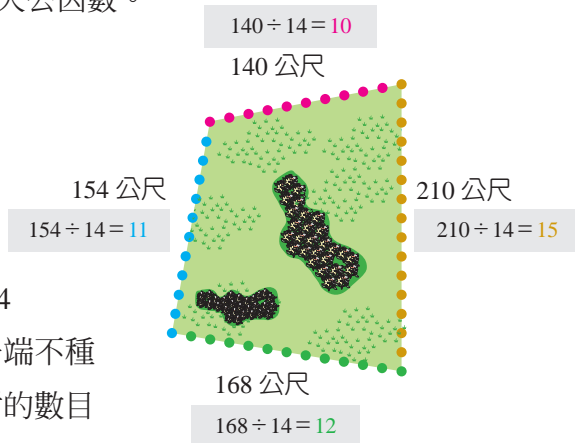
$$(140, 154, 168, 210) = 2 \times 7 = 14$$

由圖可以看成每邊的一端種、一端不種

所以 每邊的間隔數 = 每邊種樹的數目

$$10 + 11 + 12 + 15 = 48 \text{ (棵)}$$

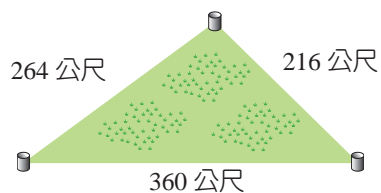
所以最少要種 48 棵樹。



隨堂練習

有一個三角形的公園，三邊長分別是 216 公尺、264 公尺與 360 公尺，現在要在公園的周圍種樹，每棵樹的距離相等，但是公園的三個頂點不種樹而設置垃圾桶，試問最少要種幾棵樹？

32



配套指示器

- 類題熟練本 P45
- 十分鐘輕鬆考基礎篇 第 26 回

補充問題

- 有一個三角形公園，今要在其三邊架設照明燈，每盞燈的距離皆相同，且三個頂點都要有照明燈，已知此公園的三邊長分別為 270 公尺、180 公尺、150 公尺，則至少要架設多少盞照明燈？

20 盞

2 最小公倍數

對應能力指標 7-n-10

活動5 能了解公倍數的意義，並求出兩數的最小公倍數。

某幾個整數共同的倍數稱為這幾個整數的**公倍數**，在這些公倍數中，最小的一個稱為**最小公倍數**。

例如：12 的倍數有 12、24、36、48、60、72、84、96、108、……

18 的倍數有 18、36、54、72、90、108、126、144、……

其中 36、72、108 都是 12 和 18 的公倍數，而 36 就是 12 和 18 的最小公倍數。通常我們用 $[12, 18]$ 來表示 12 和 18 的最小公倍數，即 $[12, 18] = 36$ 。

最小公倍數 36 的倍數 36、72、108、…… 都是 12 和 18 的公倍數，

所以 12 和 18 的公倍數都是最小公倍數 36 的倍數。

我們也可以這樣想：

因為 $12 = 2 \times 2 \times 3 = (2 \times 3) \times 2$

$18 = 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 3) \times 3$

其中 2×3 是 12 和 18 的最大公因數。

如果甲數是 12 和 18 的公倍數，因為甲數是 12 的倍數，所以甲數至少為

$(2 \times 3) \times 2$ ，甲數又是 18 的倍數，所以甲數至少為 $(2 \times 3) \times 2 \times 3 = 36$ ，即

12 和 18 的最小公倍數為 36。

例題 10 求兩數的最小公倍數

搭配習作 P31 基礎題 4

求 36 和 84 的最小公倍數。

解一 先個別作質因數分解，再求最小公倍數

$$\begin{aligned} 36 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ 84 &= 2 \times 2 \times 3 \times 7 \end{aligned}$$

所以 36 和 84 的最小公倍數

$$[36, 84] = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 252$$

$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ 是 36 的 7 倍，

$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ 是 84 的 3 倍。

解二 利用短除法

$$\begin{array}{l} 2 \left| \begin{array}{cc} 36 & 84 \end{array} \right. \leftarrow 36、84 \text{ 有公因數 } 2 \\ 2 \left| \begin{array}{cc} 18 & 42 \end{array} \right. \leftarrow 18、42 \text{ 有公因數 } 2 \\ 3 \left| \begin{array}{cc} 9 & 21 \end{array} \right. \leftarrow 9、21 \text{ 有公因數 } 3 \\ 3 \quad 7 \leftarrow 3、7 \text{ 兩數互質} \end{array}$$

其中， $(36, 84) = 2 \times 2 \times 3$ ，

所以 36 和 84 的最小公倍數

$$[36, 84] = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 252$$

教學眉批

■ 最小公倍數也可以想成：如果甲數是 12、18 的公倍數，因為甲數必然是 12 的倍數，所以甲數 $= 2 \times 2 \times 3 \times \dots$ ，又因為甲數也為 18 的倍數，而 $18 = 2 \times 3 \times 3$ ，所以甲數除了 $2 \times 2 \times 3$ 之外，至少還要多乘一個 3，甲數 $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times \dots$ ，由此可知，12、18 的公倍數甲數 $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times \dots = 36 \times \dots$ ，即 36 的倍數。

■ 若 a 、 b 是自然數，且 a 是 b 的因數，則 $[a, b] = b$ ，例如：
 $[6, 36] = 36$ 。

補充問題

■ 求下列各組數的最小公倍數：

(1) 7、12

(2) 15、35

(3) 16、24

(1) 84 (2) 105 (3) 48

配套指示器

■ 類題熟練本 P45

 教學眉批

- 若兩數互質，則其最小公倍數為兩數的乘積。例如：
 $[11, 20] = 11 \times 20$ 。

 隨堂練習

求下列各式的值：

(1) $[8, 20]$

40

(2) $[15, 24]$

120

 例題 11 求兩數的最小公倍數

搭配習作 P31 基礎題 4

求 126 和 108 的最小公倍數。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 126 \quad 108 \\ \hline 3 & 63 \quad 54 \\ \hline 3 & 21 \quad 18 \\ \hline & 7 \quad 6 \end{array}$$

所以 126 和 108 的最小公倍數 $[126, 108] = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 6 = 756$

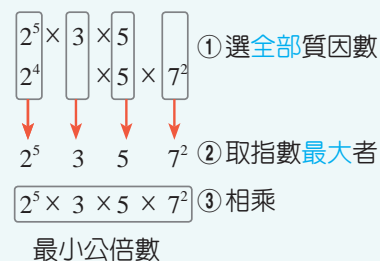
 例題 12 利用標準分解式求最小公倍數

搭配習作 P31 基礎題 4(5)
P32 基礎題 6(1)

求 $2^5 \times 3 \times 5$ 和 $2^4 \times 5 \times 7^2$ 的最小公倍數。


$$\begin{aligned} \text{解 } 2^5 \times 3 \times 5 &= (2^4 \times 5) \times 2 \times 3 \\ 2^4 \times 5 \times 7^2 &= (2^4 \times 5) \times 7^2 \\ \text{所以最小公倍數 } [2^5 \times 3 \times 5, 2^4 \times 5 \times 7^2] \\ &= (2^4 \times 5) \times 2 \times 3 \times 7^2 \\ &= 2^5 \times 3 \times 5 \times 7^2 \end{aligned}$$

我們可以這樣看：




由例題 12 可以發現，

求 $[a, b]$ 可先求出 a 和 b 的標準分解式，找出兩者全部的質因數，把相同的質因數中指數最大者相乘，即為 a 和 b 的最小公倍數。

 教具指示器

- 教學掛圖
4A-4

 配套指示器

- 類題熟練本 P45、46

 補充問題

- 求下列各組數的最小公倍數：
 - 9、21
 - 52、390
 - 105、385

(1) 63 (2) 780 (3) 1155

 隨堂練習

求下列各組數的最小公倍數：

(1) 180、216

1080

(2) 280、800

5600

(3) $2^3 \times 3^2 \times 5$ 、 $3 \times 5^2 \times 7$

12600 (或 $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$)

(4) 135、 $3^5 \times 7$

8505 (或 $3^5 \times 5 \times 7$)

我們學會了求兩個數的最小公倍數，那麼如何求三個數的最小公倍數呢？我們以求 4、10、6 的最小公倍數為例來說明。

先將 4、10、6 分別作質因數分解：

$4 = 2 \times 2$

$10 = 2 \times 5$

$6 = 2 \times 3$

若甲數為 4、10、6 的公倍數，則甲數為 4 的倍數，所以甲數至少為 2×2 ；甲數又為 10 的倍數，所以甲數至少為 $2 \times 2 \times 5$ ；而且甲數也為 6 的倍數，所以甲數至少為 $2 \times 2 \times 5 \times 3$ 。

所以甲數最小為 $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ，即 4、10、6 之最小公倍數為 60。

 例題 13 求三數的最小公倍數

搭配習作 P32 基礎題 5

求 70、42、18 三數的最小公倍數。


解 $70 = 2 \times 5 \times 7$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

$18 = 2 \times 3 \times 3$

所以 70、42、18 的最小公倍數 $[70, 42, 18] = 2 \times 5 \times 7 \times 3 \times 3 = 630$

活動 6 能求出三數的最小公倍數。

 教學眉批

- 求三個數的最小公倍數，在方法上可視為求兩個數的最小公倍數的推廣，教師也可以用 $[a, b, c] = [a, [b, c]]$ 來說明。

 補充問題


求下列各組數的最小公倍數：

(1) $3^2 \times 5^3 \times 11$ 、 $2 \times 5^2 \times 11$


(2) $2^5 \times 3^2 \times 7^2 \times 13^2$ 、 $2 \times 5^2 \times 7 \times 11^2$

(3) 153、 $2 \times 3^3 \times 13^2 \times 19$

(1) $2 \times 3^2 \times 5^3 \times 11$ (2) $2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2 \times 13^2$ (3) $2 \times 3^3 \times 13^2 \times 17 \times 19$

 配套指示器

- 類題熟練本 P46


教學眉批

- 用短除法求三個數的最小公倍數，須算到兩兩互質才停止。

我們也可以用短除法求三數的最小公倍數。通常求三數的最小公倍數的題目常伴隨求其最大公因數，因此使用短除法計算時，先將三數共有的質因數提出來，再逐步將兩數共有的質因數提出，直到兩兩互質。把所有的質因數及剩下來的數相乘，即為最小公倍數。

我們以例題 13 來說明：

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 70 \quad 42 \quad 18 & \leftarrow 70、42、18 \text{ 都含有公因數 } 2 \\
 3 & 35 \quad 21 \quad 9 & \leftarrow 21、9 \text{ 含有公因數 } 3 \\
 7 & 35 \quad 7 \quad 3 & \leftarrow 35、7 \text{ 含有公因數 } 7 \\
 & 5 \quad 1 \quad 3 &
 \end{array}$$

所以 $[70, 42, 18] = 2 \times 3 \times 7 \times 5 \times 1 \times 3 = 630$

因為 $630 = 2 \times 3 \times 7 \times 5 \times 1 \times 3$ ，所以 630 含有 70 所有質因數的乘積 $2 \times 5 \times 7$ ，同理，也含有 42、18 所有質因數的乘積，所以 630 是 70、42、18 的公倍數。

例題 14 利用短除法求三數的最小公倍數

搭配習作 P32 基礎題 5

求 27、30、45 三數的最小公倍數。

$$\begin{array}{r|l}
 3 & 27 \quad 30 \quad 45 & \leftarrow 27、30、45 \text{ 都含有公因數 } 3 \\
 3 & 9 \quad 10 \quad 15 & \leftarrow 9、15 \text{ 含有公因數 } 3 \\
 5 & 3 \quad 10 \quad 5 & \leftarrow 10、5 \text{ 含有公因數 } 5 \\
 & 3 \quad 2 \quad 1 &
 \end{array}$$

所以 $[27, 30, 45] = 3 \times 3 \times 5 \times 3 \times 2 \times 1 = 270$


隨堂練習


求下列各組數的最小公倍數：

(1) 28、36、48

1008 (或 $2^4 \times 3^2 \times 7$)

(2) 24、20、30

120 (或 $2^3 \times 3 \times 5$)


配套指示器

- 類題熟練本 P47


補充問題

- 求下列各組數的最小公倍數：

(1) 26、78、65

(2) 42、14、105

(3) $2^4 \times 3^3 \times 5^2$ 、 $3^2 \times 5^4 \times 7^3$ 、 $5^3 \times 7^2 \times 11^4$

(1) 390 (2) 210 (3) $2^4 \times 3^3 \times 5^4 \times 7^3 \times 11^4$

例題 15 求已分解三數的最小公倍數

搭配習作 P32 基礎題 5(4)、6(2)

求 $2^3 \times 3^2 \times 5$ 、 $2^2 \times 3^3 \times 7$ 、 $2^2 \times 5^2 \times 7$ 三數的最小公倍數。

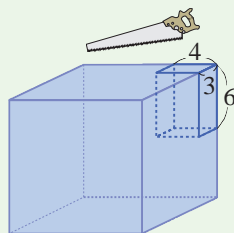
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{解} & 2^3 \times 3^2 \times 5 & & \\ \hline & 2^2 \times 3^3 & \times 7 & \\ \hline & 2^2 & \times 5^2 \times 7 & \\ \hline \end{array}$$

所以最小公倍數為 $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$ **隨堂練習**求 $3^2 \times 5 \times 7^2$ 、 $2 \times 3 \times 7^3$ 、 $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ 三數的最小公倍數。

$$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^3$$

例題 16 最小公倍數的應用問題

將一個正方體的邊長分別依 3 公分、4 公分、6 公分切割成小長方體，剛好可分割完而沒有剩下，試問此正方體的邊長最小是多少公分？



解 這個正方體的邊長必須被 3、4、6 整除，所以必是 3、4、6 的公倍數，其中最小的就是 3、4、6 的最小公倍數。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 \quad 4 \quad 6 \\ \hline 3 & 3 \quad 2 \quad 3 \\ \hline & 1 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

$$[3, 4, 6] = 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 12$$

所以正方體的邊長最小是 12 公分。

活動 7 能計算最小公倍數的應用問題。

教學眉批

- 不論題目中的關鍵字是「切割」、「裁剪」，還是「堆積」、「填滿」，都應該引導學生能自行畫出草圖，然後從公因數、公倍數的基本觀念開始思考，並正確解讀 題目中「最多」、「至少」等語意，以決定應該求最大公因數或最小公倍數。

補充問題

- 某校一年級學生約有 1000 餘人，若 20 人一數，則剩 1 人，30 人一數，也剩 1 人，45 人一數，還是剩 1 人，則該校一年級學生至少有多少人？

1081 人

配套指示器

- 類題熟練本 P47、48

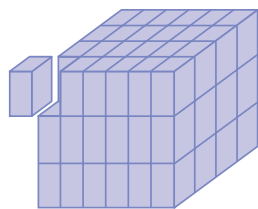
教學眉批

- 教師可視班上的程度，補充
 $(a, b) \times [a, b]$
 $= a \times b$ 的觀念。
 但要注意
 $(a, b, c) \times [a, b, c]$
 $\neq a \times b \times c$ 。
 例如：4、6、10
 的最大公因數是 2，最小公倍數是 60，
 但 $2 \times 60 \neq 4 \times 6 \times 10$ 。

隨堂練習

佩妮用長 6 公分、寬 4 公分、高 8 公分的積木堆成一個實心的正方體，所有的積木都依同方向排列，試問這個正方體的邊長至少是多少公分？共用去多少塊積木？

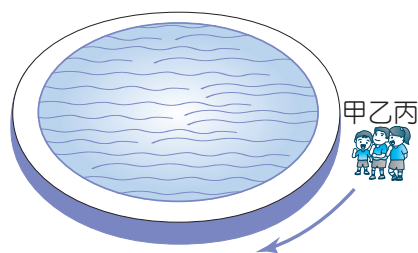
24 公分，72 塊



例題 17 最小公倍數的應用問題

甲、乙、丙三人，同時從同地出發，朝同方向繞一周長為 1800 公尺的圓形水池行走，設甲每分鐘走 90 公尺，乙每分鐘走 100 公尺，丙每分鐘走 60 公尺，則至少在幾分鐘之後三人會於原出發點會合？

解 圓形水池周長為 1800 公尺，所以
 甲每分鐘走 90 公尺，20 分鐘回到原點；
 乙每分鐘走 100 公尺，18 分鐘回到原點；
 丙每分鐘走 60 公尺，30 分鐘回到原點。



$$\begin{array}{r|l}
 2 & 20 \quad 18 \quad 30 \\
 3 & 10 \quad 9 \quad 15 \\
 5 & 10 \quad 3 \quad 5 \\
 \hline
 & 2 \quad 3 \quad 1
 \end{array}$$

$$[20, 18, 30] = 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 1 = 180$$

所以在 180 分鐘之後三人會於原出發點會合。

配套指示器

- 類題熟練本 P48

補充問題

- 某港口有渡輪、公車與火車三種交通工具，渡輪每 18 分鐘到站一次、公車每 12 分鐘到站一次、火車每 30 分鐘到站一次。若上午 10 點渡輪、公車與火車同時到站，則下次三者同時到站的時刻為幾點？

下午 1 點

 隨堂練習

有一條公路長 3600 公尺，自起點開始，在中央分隔島每隔 60 公尺種一棵樹，每隔 80 公尺設置一盞路燈，若起點既種樹也設置路燈，試問同時種樹與設置路燈共有多少處？

16 處


 重點回顧

1. **公因數與最大公因數**：某幾個整數共同的因數稱為這幾個整數的公因數，在這幾個整數的公因數中，最大的一個稱為最大公因數。
2. **公倍數與最小公倍數**：某幾個整數共同的倍數稱為這幾個整數的公倍數，在這幾個整數的公倍數中，最小的一個稱為最小公倍數。
3. **互質**：若兩數的最大公因數為 1，則稱兩數互質。
4. **已完成標準分解式的幾個數之最大公因數**：取共同質因數，最小指數者相乘。
5. **已完成標準分解式的幾個數之最小公倍數**：取全部質因數，最大指數者相乘。


 數學小語錄

如果我比其他人看得遠一些，那是因為我站在巨人的肩膀上。

——牛頓 (Isaac Newton, 1642-1727)

 配套指示器

- 類題熟練本 P48
- 十分鐘輕鬆考基礎篇 第 27 回
- 無敵大補帖基礎篇 P25~28

 教學眉批

- 因為 1 與任何整數的最大公因數都是 1，所以 1 與任何整數互質。

2-2 自我評量

1. 指出 1、7、8、15、23 五數中，哪些數與 12 互質？

1、7、23

2. 求下列各組數的最大公因數：

(1) 42、36

6

(2) 21、46

1

(3) 288、336

48

(4) 160、 $2^4 \times 5 \times 7$

80

(5) 24、32、36

4

(6) $2^2 \times 3 \times 7$ 、 $2 \times 3^2 \times 5$

6

3. 求下列各組數的最小公倍數：

(1) 12、21

84

(2) 8、15


120

(3) 240、252

5040 (或 $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$)

(4) 280、 $2^4 \times 7 \times 11$

$2^4 \times 5 \times 7 \times 11$

 配套指示器

- 類題熟練本 P49
- 考前衝刺 P14、15
- 考前 100 分 P14、15
- 歷屆基測試題 2-2

 補充問題

■ 求下列各組數的最大公因數：

(1) 140、84、98

(2) 80、96、60

(3) $2^2 \times 3^4 \times 13$ 、1170、 $3^4 \times 7 \times 11 \times 13$

(1) 14 (2) 4 (3) $3^2 \times 13$

(5) 7、24、14

168 (或 $2^3 \times 3 \times 7$)

(6) 27、20、18

540 (或 $2^2 \times 3^3 \times 5$)

4. 淑惠家的客廳長 690 公分、寬 720 公分，她想將地板鋪滿大小相同的正方形瓷磚。在不切割瓷磚的前提下，淑惠所能選擇的瓷磚邊長最大是多少公分？此時共需要多少塊瓷磚才能將地板鋪滿？

邊長最大為 30 公分，共需 552 塊。

5. 俊傑的三個姊姊都已出嫁，大姊每 7 天回娘家一次，二姊每 5 天回娘家一次，三姊每 10 天回娘家一次。某次她們三位姊妹在娘家碰面，試問再過幾天，三位姊妹才能再次碰面？

70 天

補充問題

- 已知有若干個長為 30 公分，寬為 20 公分的長方形地磚，試回答下列問題：
 - (1) 用此地磚拼成一個正方形，最少需要多少塊？
 - (2) 若有此地磚 800 塊，欲在地上鋪成一個最大的實心正方形，則會剩下多少塊？

(1) 6 塊 (2) 74 塊

配套指示器

- 類題熟練本 P50
- 十分鐘輕鬆考進階篇 第 9 回
- 無敵大補帖進階篇 P16、17